Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 24 (1924-1925)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: MÉTHODE NOUVELLE DE PROJECTION DE L'HYPERESPACE A QUATRE DIMENSIONS

Autor: Hlavaty, V.

Kapitel: IV. — Plan.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515769

à quatre droites $(\underline{A}\underline{A}'\,{}^{k}\underline{C}\,{}^{0}\underline{C})$. Si $\underline{A}$ et $\underline{A}'$ sont concourantes, on ne peut mener qu'une sécante commune à $(\underline{A}\underline{A}'\,{}^{k}\underline{C}\,{}^{0}\underline{C})$. Sa k-ième projection est en même temps la k-ième projection du point d'intersection $x \equiv (\underline{A}\underline{A}')$. Les séries mentionnées sont liées par la projectivité parabolique, parce qu'elles n'ont qu'un point double x_k.

Si les droites $\underline{A}$ *et* $\underline{A}'$ *sont concourantes, les séries* $\underline{A}_k(\underline{a}_k, \underline{b}_k, \underline{c}_k, \ldots) \barwedge \underline{A}'_k(\underline{a}'_k, \underline{b}'_k, \underline{c}'_k, \ldots)$ *sont paraboliquement projectives.*

IV. — Plan.

1. — *Triangle caractéristique.* Désignons par α_i la i-ième projection du plan α, c'est-à-dire l'ensemble de i-ièmes projections de tous ses points. Le plan α est déterminé par deux droites D, D′ concourantes au point p. Nous avons démontré (III, 1) la relation

$$\left.\begin{array}{l} D'_1(a'_1, b'_1, c'_1, \ldots p_1, \ldots) \barwedge D'_2(a_2, b'_2, c'_2 \ldots p_2, \ldots) \\ D_1(a_1, b_1, c_1, \ldots p_1, \ldots) \barwedge D_2(a_2, b_2, c_2, \ldots p_2, \ldots) \end{array}\right. . \quad \text{Il s'en suit } \alpha_1 \barwedge \alpha_2 .$$

Les champs α_1 et α_2 sont projectifs. On a donc trois points doubles (distincts en général): x_{12}, y_{12}, z_{12}. Nous appelons le triangle $x_{12}\,y_{12}\,z_{12}$ *triangle caractéristique* du plan α. Deux de ses sommets sont à l'infini. Ils nous représentent les projections (confondues) de deux sécantes communes à $\underline{A}\,{}^{0}\underline{C}\,{}^{1}\underline{C}\,{}^{2}\underline{C}$ ($\underline{A}$ est droite impropre du plan α). Le troisième $x \equiv x_1 \equiv x_2$ est le point d'intersection de deux plans π et α.

La droite $\underline{X}_i \equiv (\underline{y}_i \underline{z}_i)$ est en même temps la i-ième projection de la congruence linéaire de droites qui s'appuient sur les rayons projetants des points y et z. Il s'en suit que le triangle $\underline{x}\underline{y}_{12}\underline{z}_{12}$ ne détermine pas d'une manière uniforme le plan α. Il nous faut encore un point quelconque pour le déterminer. La droite (ax) a un point commun avec l'espace $({}^{1}\underline{C}\,{}^{2}\underline{C})$. On mène par ce point l'unique rayon possible de la congruence mentionnée et on le considère comme rayon impropre du plan α:

Le plan est fixé par le triangle caractéristique x_{12}, y_{12}, z_{12} *et un de ses points.*

Indiquons par $\underline{X}_{12}$, Y_{12}, Z_{12}, les droites $(\underline{y}_{12}, \underline{z}_{12})$, $(\underline{z}_{12}, x_{12})$,

(x_{12}, y_{12}). Chaque droite D de α rencontre $\underline{X}$ (Y, Z) en un point x' (y', z'). Le rayon de rappel du point x' (y', z') est sur $\underline{X}_{12}$ (Y_{12}, Z_{12}). Il s'en suit que la parabole P_D est inscrite au triangle $x_{12}\, y_{12}\, z_{12}$:

Toutes les paraboles de toutes les droites du plan donné sont inscrites au triangle caractéristique de ce plan.

2. — *Positions exceptionnelles.* — A. Si les plans α, π, se rencontrent suivant une droite D, on parvient à la méthode élémentaire de projection avec les centres impropres qui sont points d'intersections de l'espace $(\alpha\pi)$ et ${}^1\underline{C}$ resp. ${}^2\underline{C}$. Le triangle caractéristique a une droite double D_{12}.

B. Si le plan et la droite ${}^i\underline{C}$ se rencontrent au point ${}^ic$, la i-ième projection α_i est la droite α_i. La i-ième projection du plan contenant ${}^i\underline{C}$ est le point α_i. Spécialement pour $i \equiv 2$:

La 2-ième projection du plan complètement orthogonal à π est le point α_i.

En combinant les cas ci-dessus énumérés, on obtient les positions diverses, d'ailleurs sans difficulté quant à leurs projections.

3. — *Point et plan.* Soit donné le plan α par le triangle $x_{12}\, y_{12}\, z_{12}$ et par un de ses points a. On a à trouver le point b de α dont la i-ième projection est donnée. On résout ce problème en trouvant dans α_k le point b_k appartenant à b_i dans α_i. On peut se servir du triangle $x_{12}\, y_{12}\, z_{12}$, en tenant compte du fait que les séries de points sur $\underline{X}$ (Y, Z) se projettent suivant deux séries projectives sur $\underline{X}_{12}$ (Y_{12}, Z_{12}) avec les points doubles y_{12}, z_{12} $(z_{12}, x_{12}; x_{12}\, y_{12})$.

4. — *Droite et plan.* On a maintenant trois problèmes à résoudre. A. Trouver la k-ième projection d'une droite D de α, si D^i est donnée. B. Trouver la droite D dans α, dont la parabole est donnée. C. Trouver le point d'intersection p (s'il existe) du plan α et de la droite B.

A. Ce problème peut être résolu de la manière analogue à IV, 3.

B. On peut considérer la parabole P_D (inscrite au triangle $x_{12}\, y_{12}\, z_{12}$) comme enveloppe des droites D_i dans α_i. A la parabole ainsi conçue correspond dans α_k la parabole P'_D, enveloppe des droites D_k. Cette parabole est de même inscrite au triangle $x_{12}\, y_{12}\, z_{12}$, parce qu'à la droite $\underline{X}_i$ (Y_i, Z_i) dans α_i correspond la droite $X_k (Y_k, Z_k)$ dans α_k. La dernière tangente commune des paraboles P_D et P'_D est la droite D_k. On procède ensuite d'après IV, 4, A.

C. Il y a assurément dans α une droite D telle que l'on ait $D_i \equiv B_i$. Si le point d'intersection x existe, x_k doit être situé sur D_k, parce que sa i-ième projection doit se trouver sur B_i. Or si les deux droites D et B se rencontrent, leur point d'intersection représente le point cherché (III, 3). Si elles ne se rencontrent pas, le point d'intersection n'existe pas.

5. — *Deux plans.* Quant à la position mutuelle de deux plans, nous distinguerons les plans *concourants*, situés dans un même espace et les plans *sécants*, qui n'y sont pas. Les premiers sont toujours *demi-parallèles*, les autres ne le sont que si leur point commun est à l'infini.

Soient donnés deux plans sécants α et α', non demiparallèles. Nous avons démontré (IV, 1) les relations $\alpha_1 \overline{\wedge} \alpha_2$ et $\alpha'_1 \overline{\wedge} \alpha'_2$. Or, en posant $\alpha_i \equiv \alpha_i$ on obtient $\alpha_k \overline{\wedge} \alpha'_k$. Ces champs projectifs ont trois points doubles (distincts en général), dont deux, situés à l'infini, représentent les k-ièmes projections de deux sécantes communes à $\underline{A}\underline{A}'^k\underline{C}^0\underline{C}$. ($\underline{A}$ et $\underline{A}'$ sont droites impropres des plans α et α' (III, 4)).

Le troisième point double est la k-ième projection du point d'intersection de α et α'. Pour le fixer on lui trouve le point correspondant dans α_i d'après IV, 3. Si les plans sécants sont demiparallèles, les trois points doubles se confondent en un seul point impropre (III, 4, fin).

Si les deux plans demiparallèles sont concourants, on peut trouver d'une autre manière la droite d'intersection. La parabole inscrite au quadrilatère $Y_{12} Z_{12} Y'_{12} Z'_{12}$ ($\underline{X}_{12} Y_{12} Z_{12}$ et $\underline{X}'_{12} Y'_{12} Z'_{12}$ sont les triangles caractéristiques de α et α') appartient à la droite cherchée. En la trouvant d'après IV, 4, B, on a trouvé la droite d'intersection des plans α et α'.

En résumé: *Les plans sont sécants, non demiparallèles, si les trois points doubles* (mentionnés plus haut) *sont distincts. Ils sont demiparallèles, si ces trois points se confondent en un seul point à l'infini. Ils sont concourants, si la parabole inscrite au quadrilatère* $Y_{12} Z_{12} Y'_{12} Z'_{12}$ *appartient à une seule droite dans* α *et* α'. *En ce cas, cette droite est leur droite d'intersection.*