

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	24 (1924-1925)
Heft:	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 Artikel:	MÉTHODE NOUVELLE DE PROJECTION DE L'HYPERSPACE A QUATRE DIMENSIONS
Autor:	Hlavaty, V.
Kapitel:	III. — Droite.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-515769

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 21.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

III. — DROITE.

1. — Une droite quelconque A et la droite iC déterminent une figure linéaire. La trace de cette figure sur π sera dite la i -ième projection A_i de la droite A . En supposant les droites A , 1C , 2C , non sécantes, on obtient les droites A_i . A_1 et A_2 ne déterminent pas A d'une manière uniforme, car les espaces $({}^1CA)$ et $({}^2CA)$ se rencontrent suivant un plan.

La projection A_i d'une droite A est une droite en général, mais les projections A_1 , A_2 ne déterminent pas la droite d'une manière uniforme.

Supposons une série linéaire $A(a, b, \dots)$ des points sur A . Les rayons projetants (aa_i) , (bb_i) , (cc_i) , ... qui sont en général des génératrices d'une quadrique gauche, font correspondre à $A(a, b, \dots)$ une série projective $A_i(a_i, b_i, \dots)$ [$A(a, b, \dots) \bar{\wedge} A_i(a_i, b_i, \dots)$]. Or, parce qu'on a $A(a, b, \dots) \bar{\wedge} A_1(a_1, b_1, \dots)$ et $A(a, b, \dots) \bar{\wedge} A_2(a_2, b_2, \dots)$, il s'en suit aussi

$$A_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} A_2(a_2, b_2, c_2, \dots).$$

L'enveloppe des droites de rappel (a_1, a_2) , (b_1, b_2) , (c_1, c_2) , ... est donc une conique, mais, parce que les projections du point impropre de A sont à l'infini, cette conique est une parabole:

A chaque droite A appartient une parabole P_A , enveloppe des rayons de rappel $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$, $(c_1 c_2)$, ... Les projections A_1 , A_2 et la parabole P_A déterminent la droite d'une manière uniforme.

2. — Positions exceptionnelles.

A. *Droite sécante iC .* En ce cas la i -ième projection de A est un point A_i qui est la trace du plan $({}^iCA)$ sur π . On a donc pour $i = 2$: *La deuxième projection d'une droite A , orthogonale à π est un point A_2 .*

B. *Droite sécante π .* L'espace $\mathbf{A} \equiv (A\pi)$, a un point commun iC avec iC . On peut donc appliquer la méthode élémentaire de projection à l'aide de deux centres impropre 1C , 2C . (${}^1C_2 \equiv {}^2C_1$).

La parabole appartenant à une droite sécante π dégénère en un faisceau de rayons parallèles.

C. *Droite impropre.* Supposons tout d'abord une droite A qui ne rencontre ni 1C ni 2C . Dans ce cas on a

$$A_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} A_2(a_2, b_2, c_2, \dots) \text{ sur } {}^0C.$$

Chacun de deux points doubles de ces deux séries représente les projections confondues d'une sécante aux quatre droites $A, {}^2C, {}^1C, {}^0C$.

La i -ième projection d'une droite A qui s'appuie sur iC est le point d'intersection de deux plans ($A{}^iC$) et π . La série $\underline{A}_i(\underline{a}_i, \underline{b}_i, \underline{c}_i \dots)$ se réduit au point \underline{A}_i . Une droite A qui s'appuie et sur 1C et sur 2C ne nous présente que deux points $\underline{A}_1, \underline{A}_2$ distincts, si elle n'est pas une des droites projectantes, confondus dans le cas contraire.

3. — *Deux droites A et A' sont concourantes au point x , si le rayon de rappel $(x_1 x_2) [x_i \equiv A_i A'_i]$ est tangent aux paraboles P_A et $P_{A'}$.* Il s'en suit pour deux droites parallèles d'après II.2:

Deux droites sont parallèles, lorsque leurs projections du même nom sont parallèles. On se sert de ce théorème pour résoudre facilement le problème de la distance de deux points a, b sur A . On mène une droite $A''/ / A$ par un point quelconque de π , et on projette parallèlement la série $A(a, b, \dots)$ sur $A''(a', b', \dots)$. Maintenant on peut procéder sur A'' dans l'espace $(A''\pi)$ ce qui est un problème élémentaire.

Deux droites A, B , dont $A_1 \equiv B_1, A_2 \equiv B_2$, sont situées dans un même plan. Ce plan est l'intersection de deux espaces $({}^1CA) \equiv ({}^1CB)$ et $({}^2CA) \equiv ({}^2CB)$. La quatrième tangente commune de deux paraboles P_A, P_B est le rayon de rappel $(x_1 x_2)$ du point d'intersection $x \equiv (AB)$.

Deux droites A, B , $A_1 \not\equiv B_1, A_2 \not\equiv B_2$ avec la parabole commune P_{AB} n'ont aucun point commun.

4. — *Deux droites impropre.* Le cas échéant on a

$$\begin{aligned} & \underline{A}_1(\underline{a}_1, \underline{b}_1, \underline{c}_1, \dots) \barwedge \underline{A}_2(\underline{a}_2, \underline{b}_2, \underline{c}_2, \dots) \\ & \underline{A}'_1(\underline{a}'_1, \underline{b}'_1, \underline{c}'_1, \dots) \barwedge \underline{A}'_2(\underline{a}'_2, \underline{b}'_2, \underline{c}'_2, \dots) \text{ sur } {}^0C. \end{aligned}$$

Or, en posant

$$\underline{A}_i(\underline{a}_i, \underline{b}_i, \underline{c}_i, \dots) \equiv \underline{A}'_i(\underline{a}'_i, \underline{b}'_i, \underline{c}'_i, \dots)$$

on obtient

$$\underline{A}_k(\underline{a}_k, \underline{b}_k, \underline{c}_k, \dots) \barwedge \underline{A}'_k(\underline{a}'_k, \underline{b}'_k, \underline{c}'_k, \dots).$$

Chacun de deux points doubles de ces deux séries projectives représente la k -ième projection d'une de deux sécantes communes

à quatre droites $(\underline{AA'}^k \underline{C}^0 \underline{C})$. Si \underline{A} et \underline{A}' sont concourantes, on ne peut mener qu'une sécante commune à $(\underline{AA'}^k \underline{C}^0 \underline{C})$. Sa k -ième projection est en même temps la k -ième projection du point d'intersection $x \equiv (\underline{AA'})$. Les séries mentionnées sont liées par la projectivité parabolique, parce qu'elles n'ont qu'un point double x_k .

Si les droites \underline{A} et \underline{A}' sont concourantes, les séries $A_k (a_k, b_k, c_k, \dots)$ et $\underline{A}'_k (a'_k, b'_k, c'_k, \dots)$ sont paraboliquement projectives.

IV. — PLAN.

1. — *Triangle caractéristique.* Désignons par α_i la i -ième projection du plan α , c'est-à-dire l'ensemble de i -èmes projections de tous ses points. Le plan α est déterminé par deux droites D , D' concourantes au point p . Nous avons démontré (III, 1) la relation

$$D'_1 (a'_1, b'_1, c'_1, \dots p_1, \dots) \wedge D'_2 (a'_2, b'_2, c'_2, \dots p_2, \dots) \quad \text{Il s'en suit } \alpha_1 \wedge \alpha_2. \\ D_1 (a_1, b_1, c_1, \dots p_1, \dots) \wedge D_2 (a_2, b_2, c_2, \dots p_2, \dots)$$

Les champs α_1 et α_2 sont projectifs. On a donc trois points doubles (distincts en général): x_{12}, y_{12}, z_{12} . Nous appelons le triangle $x_{12} y_{12} z_{12}$ *triangle caractéristique* du plan α . Deux de ses sommets sont à l'infini. Ils nous représentent les projections (confondues) de deux sécantes communes à $\underline{A}^0 \underline{C}^1 \underline{C}^2$ (\underline{A} est droite impropre du plan α). Le troisième $x \equiv \underline{x}_1 \equiv \underline{x}_2$ est le point d'intersection de deux plans π et α .

La droite $X_i \equiv (y_i z_i)$ est en même temps la i -ième projection de la congruence linéaire de droites qui s'appuient sur les rayons projetants des points y et z . Il s'en suit que le triangle $\underline{x} \underline{y}_{12} \underline{z}_{12}$ ne détermine pas d'une manière uniforme le plan α . Il nous faut encore un point quelconque pour le déterminer. La droite (ax) a un point commun avec l'espace $(^1 \underline{C} ^2 \underline{C})$. On mène par ce point l'unique rayon possible de la congruence mentionnée et on le considère comme rayon impropre du plan α :

Le plan est fixé par le triangle caractéristique x_{12}, y_{12}, z_{12} et un de ses points.

Indiquons par $\underline{X}_{12}, \underline{Y}_{12}, \underline{Z}_{12}$, les droites $(y_{12}, z_{12}), (z_{12}, x_{12}),$