

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 24 (1924-1925)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: MÉTHODE NOUVELLE DE PROJECTION DE L'HYPERSPACE A QUATRE DIMENSIONS
Autor: Hlavaty, V.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-515769>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

MÉTHODE NOUVELLE DE PROJECTION DE L'HYPERESPACE A QUATRE DIMENSIONS

PAR

V. HLAVATÝ (Prague).

Dans ce mémoire, nous allons exposer les principes de projection de l'hyperespace (à quatre dimensions) sur un plan, à l'aide de deux projections seulement. Nous n'y traiterons que des problèmes fondamentaux, dont la connaissance permet de résoudre les problèmes spéciaux. Nous supposons la connaissance

- A. de la géométrie projective dans un plan,
- B. de la méthode de projection d'un espace linéaire à trois dimensions sur un plan à l'aide de deux centres à l'infini, et
- C. de la géométrie élémentaire de l'hyperespace linéaire à quatre dimensions.

I. — NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. — *Terminologie.* Nous nous servons de lettres

a, b, c, \dots A, B, C, \dots $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$

pour désigner les points a, b, c, \dots , les droites A, B, C, \dots , les plans $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, et les espaces à trois dimensions $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$ (brièvement les espaces) dans l'hyperespace (l'espace linéaire à quatre dimensions). Les éléments à l'infini seront dits *impropres*, et désignés par des lettres soulignées $\underline{a}, \underline{A}, \underline{\alpha} \dots$.

Nous appelons *méthode élémentaire de projection* la méthode sub B. Le *rayon de rappel du point p* joint l'une à l'autre les

projections du point p . Les indices i, k , toujours distincts, se rapportent aux valeurs 1 ou 2.

2. — *Eléments fondamentaux.* Choisissons un plan quelconque π avec la droite impropre 0C pour plan de projection. Désignons par 2C la droite impropre du plan complètement orthogonal à π . Tous les plans, dont les deux angles extrêmes d'inclinaison à π sont de la valeur $+45^\circ$, se rencontrent suivant la droite 1C . Alors chaque droite du plan passant par 1C forme avec π l'angle $+45^\circ$.

II. — POINT.

1. — Un point quelconque a de l'hyperespace et la droite iC déterminent le plan projetant qui coupe le plan de projection π au point a_i . Nous le désignons comme la i -ième projection du point a . Les deux points a_1 et a_2 déterminent à leur tour le point a de l'espace, car les plans projetants $(a_1 {}^1C)$ et $(a_2 {}^2C)$ se rencontrent en un point a :

Le point est fixé par ses deux projections et ces deux projections déterminent à leur tour le point dans l'hyperespace.

Le point a et le plan π déterminent l'espace $\mathbf{A} \equiv (a\pi)$. On peut considérer le point a dans l'espace \mathbf{A} et on parvient à la méthode élémentaire de projection. Les centres de projection sont les points impropre des rayons projetants (aa_1) et (aa_2) . Cela nous permet aussitôt de trouver la distance $\overline{aa_2}$ du point a et du plan π . On l'obtient en rabattant le triangle aa_2a_1 dans π .

2. — *Positions exceptionnelles.* Les projections du point a se confondent en a , si ce point se trouve dans π . ($a_1 \equiv a_2 \equiv a$).

Soit u un point impropre dans l'unique espace impropre $({}^1C {}^2C)$. Les projections u_1, u_2 sur 0C ne le déterminent pas d'une manière uniforme, parce que les plans $({}^1Cu)$ et $({}^2Cu)$ se rencontrent suivant une droite D . En ce cas u_i est la i -ième projection de chaque point sur D . Les rayons projetants iC de kC engendrent un paraboloïde hyperbolique. Si u est situé sur une génératrice projetante de ce paraboloïde, on a $u_i \equiv u_k$. Le point u sur iC n'a pas la i -ième projection.

Pour la distance de deux points voir III, 3.

III. — DROITE.

1. — Une droite quelconque A et la droite iC déterminent une figure linéaire. La trace de cette figure sur π sera dite la i -ième projection A_i de la droite A . En supposant les droites A , 1C , 2C , non sécantes, on obtient les droites A_i . A_1 et A_2 ne déterminent pas A d'une manière uniforme, car les espaces $({}^1CA)$ et $({}^2CA)$ se rencontrent suivant un plan.

La projection A_i d'une droite A est une droite en général, mais les projections A_1 , A_2 ne déterminent pas la droite d'une manière uniforme.

Supposons une série linéaire $A(a, b, \dots)$ des points sur A . Les rayons projetants (aa_i) , (bb_i) , (cc_i) , ... qui sont en général des génératrices d'une quadrique gauche, font correspondre à $A(a, b, \dots)$ une série projective $A_i(a_i, b_i, \dots)$ [$A(a, b, \dots) \bar{\wedge} A_i(a_i, b_i, \dots)$]. Or, parce qu'on a $A(a, b, \dots) \bar{\wedge} A_1(a_1, b_1, \dots)$ et $A(a, b, \dots) \bar{\wedge} A_2(a_2, b_2, \dots)$, il s'en suit aussi

$$A_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} A_2(a_2, b_2, c_2, \dots).$$

L'enveloppe des droites de rappel (a_1, a_2) , (b_1, b_2) , (c_1, c_2) , ... est donc une conique, mais, parce que les projections du point impropre de A sont à l'infini, cette conique est une parabole:

A chaque droite A appartient une parabole P_A , enveloppe des rayons de rappel (a_1a_2) , (b_1b_2) , (c_1c_2) , ... Les projections A_1 , A_2 et la parabole P_A déterminent la droite d'une manière uniforme.

2. — Positions exceptionnelles.

A. *Droite sécante iC .* En ce cas la i -ième projection de A est un point A_i qui est la trace du plan $({}^iCA)$ sur π . On a donc pour $i = 2$: *La deuxième projection d'une droite A , orthogonale à π est un point A_2 .*

B. *Droite sécante π .* L'espace $\mathbf{A} \equiv (A\pi)$, a un point commun iC avec iC . On peut donc appliquer la méthode élémentaire de projection à l'aide de deux centres impropre 1C , 2C . (${}^1C_2 \equiv {}^2C_1$).

La parabole appartenant à une droite sécante π dégénère en un faisceau de rayons parallèles.

C. *Droite impropre.* Supposons tout d'abord une droite A qui ne rencontre ni 1C ni 2C . Dans ce cas on a

$$A_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} A_2(a_2, b_2, c_2, \dots) \text{ sur } {}^0C.$$

Chacun de deux points doubles de ces deux séries représente les projections confondues d'une sécante aux quatre droites $A, {}^2C, {}^1C, {}^0C$.

La i -ième projection d'une droite A qui s'appuie sur iC est le point d'intersection de deux plans ($A{}^iC$) et π . La série $\underline{A}_i(\underline{a}_i, \underline{b}_i, \underline{c}_i \dots)$ se réduit au point \underline{A}_i . Une droite A qui s'appuie et sur 1C et sur 2C ne nous présente que deux points $\underline{A}_1, \underline{A}_2$ distincts, si elle n'est pas une des droites projectantes, confondus dans le cas contraire.

3. — *Deux droites A et A' sont concourantes au point x , si le rayon de rappel $(x_1 x_2) [x_i \equiv A_i A'_i]$ est tangent aux paraboles P_A et $P_{A'}$.* Il s'en suit pour deux droites parallèles d'après II.2:

Deux droites sont parallèles, lorsque leurs projections du même nom sont parallèles. On se sert de ce théorème pour résoudre facilement le problème de la distance de deux points a, b sur A . On mène une droite $A''/ / A$ par un point quelconque de π , et on projette parallèlement la série $A(a, b, \dots)$ sur $A''(a', b', \dots)$. Maintenant on peut procéder sur A'' dans l'espace $(A''\pi)$ ce qui est un problème élémentaire.

Deux droites A, B , dont $A_1 \equiv B_1, A_2 \equiv B_2$, sont situées dans un même plan. Ce plan est l'intersection de deux espaces $({}^1CA) \equiv ({}^1CB)$ et $({}^2CA) \equiv ({}^2CB)$. La quatrième tangente commune de deux paraboles P_A, P_B est le rayon de rappel $(x_1 x_2)$ du point d'intersection $x \equiv (AB)$.

Deux droites A, B , $A_1 \not\equiv B_1, A_2 \not\equiv B_2$ avec la parabole commune P_{AB} n'ont aucun point commun.

4. — *Deux droites impropre.* Le cas échéant on a

$$\begin{aligned} & \underline{A}_1(\underline{a}_1, \underline{b}_1, \underline{c}_1, \dots) \barwedge \underline{A}_2(\underline{a}_2, \underline{b}_2, \underline{c}_2, \dots) \\ & \underline{A}'_1(\underline{a}'_1, \underline{b}'_1, \underline{c}'_1, \dots) \barwedge \underline{A}'_2(\underline{a}'_2, \underline{b}'_2, \underline{c}'_2, \dots) \text{ sur } {}^0C. \end{aligned}$$

Or, en posant

$$\underline{A}_i(\underline{a}_i, \underline{b}_i, \underline{c}_i, \dots) \equiv \underline{A}'_i(\underline{a}'_i, \underline{b}'_i, \underline{c}'_i, \dots)$$

on obtient

$$\underline{A}_k(\underline{a}_k, \underline{b}_k, \underline{c}_k, \dots) \barwedge \underline{A}'_k(\underline{a}'_k, \underline{b}'_k, \underline{c}'_k, \dots).$$

Chacun de deux points doubles de ces deux séries projectives représente la k -ième projection d'une de deux sécantes communes

à quatre droites $(\underline{AA'}^k \underline{C}^0 \underline{C})$. Si \underline{A} et \underline{A}' sont concourantes, on ne peut mener qu'une sécante commune à $(\underline{AA'}^k \underline{C}^0 \underline{C})$. Sa k -ième projection est en même temps la k -ième projection du point d'intersection $x \equiv (\underline{AA'})$. Les séries mentionnées sont liées par la projectivité parabolique, parce qu'elles n'ont qu'un point double x_k .

Si les droites \underline{A} et \underline{A}' sont concourantes, les séries $A_k (a_k, b_k, c_k, \dots)$ et $\underline{A}'_k (a'_k, b'_k, c'_k, \dots)$ sont paraboliquement projectives.

IV. — PLAN.

1. — *Triangle caractéristique.* Désignons par α_i la i -ième projection du plan α , c'est-à-dire l'ensemble de i -èmes projections de tous ses points. Le plan α est déterminé par deux droites D , D' concourantes au point p . Nous avons démontré (III, 1) la relation

$$D'_1 (a'_1, b'_1, c'_1, \dots p_1, \dots) \wedge D'_2 (a'_2, b'_2, c'_2, \dots p_2, \dots) \quad \text{Il s'en suit } \alpha_1 \wedge \alpha_2. \\ D_1 (a_1, b_1, c_1, \dots p_1, \dots) \wedge D_2 (a_2, b_2, c_2, \dots p_2, \dots)$$

Les champs α_1 et α_2 sont projectifs. On a donc trois points doubles (distincts en général): x_{12}, y_{12}, z_{12} . Nous appelons le triangle $x_{12} y_{12} z_{12}$ *triangle caractéristique* du plan α . Deux de ses sommets sont à l'infini. Ils nous représentent les projections (confondues) de deux sécantes communes à $\underline{A}^0 \underline{C}^1 \underline{C}^2$ (\underline{A} est droite impropre du plan α). Le troisième $x \equiv \underline{x}_1 \equiv \underline{x}_2$ est le point d'intersection de deux plans π et α .

La droite $X_i \equiv (y_i z_i)$ est en même temps la i -ième projection de la congruence linéaire de droites qui s'appuient sur les rayons projetants des points y et z . Il s'en suit que le triangle $\underline{x} \underline{y}_{12} \underline{z}_{12}$ ne détermine pas d'une manière uniforme le plan α . Il nous faut encore un point quelconque pour le déterminer. La droite (ax) a un point commun avec l'espace $(^1 \underline{C} ^2 \underline{C})$. On mène par ce point l'unique rayon possible de la congruence mentionnée et on le considère comme rayon impropre du plan α :

Le plan est fixé par le triangle caractéristique x_{12}, y_{12}, z_{12} et un de ses points.

Indiquons par X_{12}, Y_{12}, Z_{12} , les droites $(y_{12}, z_{12}), (z_{12}, x_{12}),$

$(x_{12}, \underline{y}_{12})$. Chaque droite D de α rencontre $X(Y, Z)$ en un point $x'(y', z')$. Le rayon de rappel du point $x'(y', z')$ est sur $\underline{X}_{12}(Y_{12}, Z_{12})$. Il s'en suit que la parabole P_D est inscrite au triangle $x_{12} \underline{y}_{12} \underline{z}_{12}$:

Toutes les paraboles de toutes les droites du plan donné sont inscrites au triangle caractéristique de ce plan.

2. — *Positions exceptionnelles.* — A. Si les plans α, π , se rencontrent suivant une droite D , on parvient à la méthode élémentaire de projection avec les centres improprez qui sont points d'intersections de l'espace $(\alpha \pi)$ et 1C resp. 2C . Le triangle caractéristique a une droite double D_{12} .

B. Si le plan et la droite iC se rencontrent au point iC , la i -ième projection α_i est la droite $\underline{\alpha}_i$. La i -ième projection du plan contenant iC est le point α_i . Spécialement pour $i \equiv 2$:

La 2-ième projection du plan complètement orthogonal à π est le point α_2 .

En combinant les cas ci-dessus énumérés, on obtient les positions diverses, d'ailleurs sans difficulté quant à leurs projections.

3. — *Point et plan.* Soit donné le plan α par le triangle $x_{12} \underline{y}_{12} \underline{z}_{12}$ et par un de ses points a . On a à trouver le point b de α dont la i -ième projection est donnée. On résout ce problème en trouvant dans α_k le point b_k appartenant à b_i dans α_i . On peut se servir du triangle $x_{12} \underline{y}_{12} \underline{z}_{12}$, en tenant compte du fait que les séries de points sur $X(\bar{Y}, \bar{Z})$ se projettent suivant deux séries projectives sur $\underline{X}_{12}(\bar{Y}_{12}, Z_{12})$ avec les points doubles $\underline{y}_{12}, \underline{z}_{12}$ ($\underline{z}_{12}, x_{12}; x_{12} \underline{y}_{12}$).

4. — *Droite et plan.* On a maintenant trois problèmes à résoudre. A. Trouver la k -ième projection d'une droite D de α , si D^i est donnée. B. Trouver la droite D dans α , dont la parabole est donnée. C. Trouver le point d'intersection p (s'il existe) du plan α et de la droite B .

A. Ce problème peut être résolu de la manière analogue à IV, 3.

B. On peut considérer la parabole P_D (inscrite au triangle $x_{12} \underline{y}_{12} \underline{z}_{12}$) comme enveloppe des droites D_i dans α_i . A la parabole ainsi conçue correspond dans α_k la parabole P'_D , enveloppe des droites D_k . Cette parabole est de même inscrite au triangle $x_{12} \underline{y}_{12} \underline{z}_{12}$, parce qu'à la droite $\underline{X}_i(Y_i, Z_i)$ dans α_i correspond la

droite $X_k(Y_k, Z_k)$ dans α_k . La dernière tangente commune des paraboles P_D et P'_D est la droite D_k . On procède ensuite d'après IV, 4, A.

C. Il y a assurément dans α une droite D telle que l'on ait $D_i \equiv B_i$. Si le point d'intersection x existe, x_k doit être situé sur D_k , parce que sa i -ième projection doit se trouver sur B_i . Or si les deux droites D et B se rencontrent, leur point d'intersection représente le point cherché (III, 3). Si elles ne se rencontrent pas, le point d'intersection n'existe pas.

5. — *Deux plans.* Quant à la position mutuelle de deux plans, nous distinguerons les plans *concourants*, situés dans un même espace et les plans *sécants*, qui n'y sont pas. Les premiers sont toujours *demi-parallèles*, les autres ne le sont que si leur point commun est à l'infini.

Soient donnés deux plans sécants α et α' , non demiparallèles. Nous avons démontré (IV, 1) les relations $\alpha_1 \overline{\wedge} \alpha_2$ et $\alpha'_1 \overline{\wedge} \alpha'_2$. Or, en posant $\alpha_i \equiv \alpha_i$ on obtient $\alpha_k \overline{\wedge} \alpha'_k$. Ces champs projectifs ont trois points doubles (distincts en général), dont deux, situés à l'infini, représentent les k -ièmes projections de deux sécantes communes à AA'^kC^0C . (A et A' sont droites improches des plans α et α' (III, 4)).

Le troisième point double est la k -ième projection du point d'intersection de α et α' . Pour le fixer on lui trouve le point correspondant dans α_i d'après IV, 3. Si les plans sécants sont demi-parallèles, les trois points doubles se confondent en un seul point impropre (III, 4, fin).

Si les deux plans demiparallèles sont concourants, on peut trouver d'une autre manière la droite d'intersection. La parabole inscrite au quadrilatère $Y_{12}Z_{12}Y'_{12}Z'_{12}$ ($X_{12}Y_{12}Z_{12}$ et $X'_{12}Y'_{12}Z'_{12}$ sont les triangles caractéristiques de α et α') appartient à la droite cherchée. En la trouvant d'après IV, 4, B, on a trouvé la droite d'intersection des plans α et α' .

En résumé: *Les plans sont sécants, non demiparallèles, si les trois points doubles (mentionnés plus haut) sont distincts. Ils sont demiparallèles, si ces trois points se confondent en un seul point à l'infini. Ils sont concourants, si la parabole inscrite au quadrilatère $Y_{12}Z_{12}Y'_{12}Z'_{12}$ appartient à une seule droite dans α et α' . En ce cas, cette droite est leur droite d'intersection.*

V. — ESPACE.

1. — *Triangle impropre.* On a trois points remarquables $\underline{^0c}$, $\underline{^1c}$, $\underline{^2c}$, dans chaque espace **A**. Ce sont les points d'intersections $(\bar{^0CA})$, $(\bar{^1CA})$, $(\bar{^2CA})$. Ils déterminent le plan impropre de l'espace **A**. $\underline{^0c}$ est le point impropre de la trace T de **A** sur π . On l'obtient, en joignant deux traces x , x' de deux plans α , α' de **A** (IV, 1). Le point $\underline{^i}c$ n'a pas sa i -ième projection (II, 2). Pour le trouver, on cherche la droite d'intersection D des plans $(\underline{^i}cT)$ et α . Sa i -ième projection D_i est sur T , parce que le plan $(\underline{^i}c\bar{T})$ passe par $\underline{^i}c$ (IV, 2, A). On trouve d'après IV, 4, A sa k -ième projection dans α_k . Parce que la droite cherchée rencontre π , les rayons de rappels de ses points passent par $\underline{^i}c_k$ (III, 2, B). C'est la k -ième projection du centre de projection $\underline{^i}c$ pour la droite D . Nous appelons $\underline{^0c}\underline{^1c}\underline{^2c}$ triangle impropre de l'espace **A**.

2. — *Positions exceptionnelles.* — A. **A** contient π . Alors les projections $\underline{^i}c_k$ et $\underline{k}c_i$ se confondent. C'est donc la méthode élémentaire de projection avec les centres à l'infini.

B. **A** contient $\underline{i}C$. Dans ce cas, sa trace T_i est sa i -ième projection. Spécialement pour $i = 2$:

La deuxième projection de l'espace demiorthogonal à π est une droite.

C. **A** contient $\underline{^1}C$ et $\underline{^2}C$. Il est donc l'unique espace impropre de l'hyperespace.

3. — *Point et espace.* Soit donné un point quelconque p_i dans π . Le plan $(\underline{i}Cp)$ et l'espace donné **A** se rencontrent suivant une droite P qui passe par $\underline{i}c$. p_i est donc la i -ième projection d'une droite P de **A**, passant par $\underline{i}c$. Or, il nous faut encore un de ses points pour la connaître. Le plus facile est de déterminer le point d'intersection p' de P et du plan $(\underline{k}cT)$, parce que sa k -ième projection se trouve sur T_k . Le point d'intersection de T_{12} et de $(\underline{k}c_i p_i)$ nous livre p'_k . $P_k \equiv (\underline{k}c_k p'_k)$.

Toutes les droites P_k sont parallèles.

4. — *Droite et espace.* Trouvons la k -ième projection D_k d'une droite D de **A**, si D_i est donnée. Il suffit de répéter deux fois la construction de V, 3, pour deux points a et b , sur D . Il s'en suit aussitôt que chaque droite de π peut être considérée comme la

k -ième projection D_k appartenant à D_i , pourvu que l'on fasse correspondre à deux points a_i et b_i de D_i les points a_k et b_k sur D_k d'après V, 3.

Grâce à cette méthode, on peut facilement trouver le point d'intersection d'une droite quelconque E et de l'espace \mathbf{A} . On trouve, d'après la méthode que nous venons d'expliquer, une droite D dans \mathbf{A} telle que l'on a $E_1 \equiv D_1$ et $E_2 \equiv D_2$. Les droites E et D se rencontrent au point cherché (III, 3).

5. — *Plan et espace. Deux espaces.* Pour trouver l'intersection de ces deux figures linéaires, on procède d'après la méthode précédente et on détermine ainsi le nombre nécessaire des points communs à ces deux figures linéaires.

6. — *Constructions auxiliaires* pour résoudre les problèmes non métriques dans \mathbf{A} . On peut projeter l'espace \mathbf{A} d'un point o quelconque (non situé dans \mathbf{A}) sur un espace \mathbf{A}' contenant π . Grâce à cette projection on parvient à la méthode élémentaire de projection sur π . Soit donc $\mathbf{A} \equiv (a^2c^1c^0e)$ l'espace à projeter, $\mathbf{A}' \equiv (^1c', ^2c' \pi)$ l'espace de projection et \bar{o} sur iC le centre de projection. Chaque point a de \mathbf{A} a $a_i \equiv \bar{a'_i}$, si a' désigne le point projeté sur \mathbf{A}' . Le point a' se trouve sur $P \equiv (oa)$. Mais, parce qu'il est aussi dans \mathbf{A}' , le point d'intersection des rayons $(a'_i {}^iC_{\bar{h}})$ et P_h nous représente a'_h . Pour projeter un point quelconque a' de \mathbf{A}' sur \mathbf{A} , il faut trouver la droite A_h appartenant à a_i dans \mathbf{A} (V, 3). L'intersection de cette droite avec $P_h \equiv (o_h a'_h)$ nous donne a_h . On approuve facilement le théorème suivant: *Le plan d'intersection des espaces \mathbf{A} et $(o \pi)$ se projette en π .*

Pour résoudre un problème nonmétrique dans \mathbf{A} , on le projette sur \mathbf{A}' et on y effectue la résolution. On fait ensuite projeter la figure cherchée sur \mathbf{A} , d'après la méthode ci-dessus exposée.

VI. — ORTHOGONALITÉ.

1. — *Notes préliminaires.* Soient \mathbf{A} et \mathbf{A}' les droites improches de deux plans α , α' . Pour trouver les angles extrêmes d'inclinaison de ces deux plans, il faut trouver d'abord deux sécantes B , B' à \mathbf{A} , \mathbf{A}' qui soient conjuguées par rapport à la sphère absolue. Ce sont les droites improches de deux plans complètement orthogonaux β et β' , demiparallèles et demiorthogonaux à

α et α' . Les droites $(\alpha\beta)$, $(\alpha'\beta)$ et $(\alpha\beta')$, $(\alpha'\beta')$ déterminent les angles cherchés. Si ces angles sont de la même valeur, il y a ∞^1 sécantes B , B' et les angles obtenus à l'aide des ∞^1 plans β , β' sont tous de la même valeur. Or, en faisant $A \equiv {}^1C$ et $A' \equiv {}^0C$, les ∞^1 sécantes mentionnées se réduisent aux rayons projectants, qui rencontrent 0C , 1C et 2C aux points 0c , ${}^0c^*$, 1c , ${}^1c^*$ et 2c , ${}^2c^*$. Les points 0c et ${}^0c^*$ étant conjugués par rapport à la sphère absolue, on les projette d'un point quelconque de π par des rayons orthogonaux. On a aussi

$$\underline{{}^0c} \equiv \underline{{}^1c}_2 \equiv \underline{{}^2c}_1 \quad \text{et} \quad \underline{{}^0c^*} \equiv \underline{{}^1c^*_2} \equiv \underline{{}^2c^*_1}.$$

2. — *Espace orthogonal à une droite.* Tous les problèmes de l'orthogonalité peuvent être réduits au problème de détermination de l'espace (de la droite) orthogonal ($-e$) à la droite (à l'espace). L'essentiel dans ce problème est de déterminer les éléments improches de la figure cherchée. Or, pour trouver l'espace \mathbf{A} orthogonal à la droite A , il suffit de considérer une droite $A' \parallel A$ par un point a' quelconque de π . Désignons par \mathbf{A}' l'espace $\mathbf{A}' \equiv (\pi A')$. \mathbf{A}' rencontre 1C et 2C aux points ${}^1c'$ et ${}^2c'$, ${}^1c'_2 \equiv {}^2c'_1$ (V, 2, A).

Le plan impropre de \mathbf{A} est fixé par trois points. Nous en trouvons le point d'intersection $(\mathbf{A}^2C) \equiv {}^2c$. 2c est conjugué à ${}^2c'$ par rapport à la sphère absolue. C'est le point impropre des droites orthogonales à \mathbf{A}' (et pour cette raison aussi à A'). D'après VI, 1, les points 2c_1 et ${}^2c'_1$ sont de même conjugués par rapport à la sphère absolue. On a donc $({}^2c'_1 a'_1) \perp ({}^2c_1 a'_1)$.

Deux autres points improches de l'espace cherché sont situés sur la droite impropre du plan α' , orthogonal à A' dans \mathbf{A}' . On les trouve par la méthode élémentaire de projection dans \mathbf{A}' . L'un d'eux, 0c , est le point impropre 0c de la trace T' du plan α' . En résumé:

Le plan impropre de l'espace $\mathbf{A} \perp A$ est fixé par trois points 0c , 2c , p . 0c est le point impropre de la trace $T_{12} \perp A_2$ de l'espace cherché, la projection 2c_1 est conjuguée par rapport à la sphère absolue à ${}^2c'_1$ (${}^2c_1 a'_1$) $\perp ({}^2c'_1 {}^1a'_1)$, et p est le point quelconque impropre du plan $\alpha' \perp A'$ dans \mathbf{A}' .

3. — *Droite orthogonale à l'espace.* (Nous conservons la nomenclature de l'article précédent.) Il ne s'agit que de la position de

la droite A. On obtient d'abord le point ${}^2c'$ par la construction $({}^2c_1 a'_1) \perp ({}^2c'_1 a'_1)$. On trouve ensuite le plan commun α' de deux espaces \mathbf{A} et $\mathbf{A}' \equiv ({}^2c' \pi)$. Une droite $A' \perp \alpha'$ dans \mathbf{A}' nous présente le résultat cherché. On peut faciliter la construction, en se servant du fait que l'on a $A'_2 \perp T_{12}$.

4. — *Problèmes spéciaux.* Pour trouver le plan complètement orthogonal à un plan donné, il suffit de trouver deux espaces, orthogonaux à deux droites du plan donné. L'intersection de ces deux espaces nous donne le résultat cherché. Comme celui-ci, tous les autres problèmes spéciaux touchant l'orthogonalité de deux figures linéaires peuvent être résolus à l'aide de VI, 2, 3. Il s'en suit que les problèmes métriques trouvent leurs solutions à l'aide de la méthode ci-dessus exposée. Nous ne jugeons pas nécessaire de nous étendre sur le développement des solutions spéciales. Le lecteur intéressé les trouve en abondance dans mon article tchèque, publié en 1922 dans le « Časopis pro pěstování matematiky a fysiky », T. LII¹.

Remarquons encore que la méthode exposée est un cas spécial de la méthode de projection de l'hyperespace linéaire à cinq dimensions sur un plan à l'aide de *trois projections seulement*, que j'ai exposée dans le même périodique tchèque en 1923, T. LIII².

Prague, février 1925.

¹ « Promítání z přímky na rovinu v prostoru čtyřrozměrném ».

² « Promítání z roviny na rovinu prostoru pětirozměrného ».