

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 24 (1924-1925)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES VOLUMES CONOÏDAUX  
**Autor:** Papillon, Pierre  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515767>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

éventualité nous croyons qu'il serait malaisé d'obtenir un cas particulier du problème des trajectoires orthogonales, qui permit de se rendre plus ou moins compte de la manière assurément singulière dont les lignes de courbure se comportent dans le voisinage d'un semblable ombilic.

Enfin nous allons faire une remarque qui, très probablement, ne peut pas être généralisée: dans les différents exemples que nous avons traités ( $4^{\circ}$ - $8^{\circ}$ ), toute ligne de courbure passant par un ombilic est une géodésique<sup>1</sup>.

Liège, le 20 juillet 1925.

## SUR LES VOLUMES CONOÏDAUX

PAR

Pierre PAPILLON (Strasbourg).

1. — Le sujet n'est en lui-même point nouveau, et, c'est aux travaux de M. A. BUHL qu'il se faut reporter pour une documentation plus complète. (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3<sup>me</sup> série, tome II, pages 57 et sqq.) Mais, dans ce Mémoire, l'auteur avait plus précisément en vue des propriétés attachées aux transformations stokiennes. Afin d'éviter des recherches complémentaires, pourtant fort intéressantes, je rappellerai tout d'abord la définition et l'expression générale du volume conoïdal relatif à une cloison et à un axe.

2. — Soient un contour fermé (C) tracé sur une surface (S), et un axe (D) de l'espace — que nous supposerons extérieur à la cloison pour éviter des difficultés inhérentes à tout autre disposition —; le volume conoïdal W relatif à cette cloison et à

<sup>1</sup> Dans une Note complémentaire au tome IV de la *Théorie des Surfaces* de DARBOUX, se trouvent dessinées les lignes de courbure de la surface  $xyz = p^3$ ; je n'ai eu connaissance de cette Note qu'après la rédaction de mon article.

l'axe (D) est limité à la cloison et aux génératrices orthogonales à (D) qui s'appuient à la fois sur cet axe et sur le contour (C). Cette appellation se justifie, au reste, d'elle-même.

L'espace étant rapporté à trois axes rectangulaires  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , nous fixerons la position de l'axe (D) par la donnée de ses cosinus directeurs  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , et d'un quelconque de ses points  $A(a, b, c)$ ; soit alors  $M(x, y, z)$  un point pris arbitrairement sur la cloison, entouré d'un élément superficiel  $d\sigma$  où les cosinus de la normale sont  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Le volume conoïdal élémentaire a pour expression:

$$\frac{1}{2} \cdot MH \cdot d\sigma \cdot \cos \theta ,$$

$H$  étant le pied de la perpendiculaire abaissée de  $M$  sur l'axe (D),  $\theta$  l'angle de  $HM$  et de la normale à l'élément  $d\sigma$ . Des calculs simples, sur lesquels il est inutile d'insister ici, donnent alors pour l'expression du volume conoïdal total:

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \\ \nu(y-b) - \mu(z-c) & \lambda(z-c) - \nu(x-a) & \mu(x-a) - \lambda(y-b) \end{vmatrix} d\sigma . \quad (1)$$

Lorsque l'équation de la surface (S) est prise sous la forme

$$z = z(x, y) ,$$

il vient, avec des notations bien connues:

$$W = \frac{1}{2} \iint_S \begin{vmatrix} -p & -q & +1 \\ \lambda & \mu & \nu \\ \nu(y-b) - \mu(z-c) & \lambda(z-c) - \nu(x-a) & \mu(x-a) - \lambda(y-b) \end{vmatrix} dx dy . \quad (1')$$

Si l'axe (D) coïncide avec  $Oz$ , en sorte que

$$\begin{aligned} \lambda &= 0 , & \mu &= 0 , & \nu &= 1 , \\ a &= b = c = 0 , \end{aligned}$$

$W$  prend l'une des deux formes très simples:

$$W = \frac{1}{2} \iint_S [-\alpha x - \beta y] d\sigma , \quad (2)$$

ou

$$W = \frac{1}{2} \iint_S [px + qy] dx dy . \quad (2')$$

3. — *Equation aux dérivées partielles des conoïdes.* — Si la cloison est prise sur un conoïde droit d'axe (D), il est bien évident que le volume conoïdal  $W$  est nul, chacun des éléments de ce volume l'étant lui-même [ $\cos \theta = 0$ ].

*L'équation obtenue en annulant le déterminant de l'intégrale double de (1) est donc l'équation aux dérivées partielles des conoïdes droits d'axe (D): elle est du premier ordre et linéaire.*

Si nous posons:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \mu^2 + v^2, \quad A' = v^2 + \lambda^2, \quad A'' = \lambda^2 + \mu^2, \\ B = -\mu v, \quad B' = -v\lambda, \quad B'' = -\lambda\mu, \\ C = -(v^2 + \lambda^2)a + \lambda\mu b + \lambda v c, \\ C' = -(v^2 + \lambda^2)b + \dots, \\ C'' = -(\lambda^2 + \mu^2)c + \dots, \end{array} \right. \quad (3)$$

cette équation s'écrit:

$$\alpha(Ax + B''y + B'z + C) + \beta(B''x + A'y + Bz + C') + \gamma(B'x + By + A''z + C'') = 0. \quad (4)$$

Il y a, en elle, une symétrie analogue à celle que l'on rencontre dans l'étude des quadriques, et que nous allons préciser.

Faisons correspondre à l'axe (D) la quadrique (Q) d'équation:

$$\begin{aligned} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Les coefficients de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , sont les premiers membres des équations représentant les plans du centre de (Q) :

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax + B''y + B'z + C = 0, \\ B''x + A'y + Bz + C' = 0, \\ B'x + By + A''z + C'' = 0, \end{array} \right.$$

et, d'après les trois dernières équations (3), le point A est un centre pour cette quadrique.

Elle n'est, du reste, pas la plus générale; car son équation, qui semble dépendre des 9 paramètres

$$A, A', \dots, C'',$$

ne dépend en réalité que de 6 d'entre eux, les A et les B étant, en effet, liés par les trois relations:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 \cdot B^2 = A^2 - (A' - A'')^2, \\ 4 \cdot B'^2 = A'^2 - (A'' - A)^2, \\ 4 \cdot B''^2 = A''^2 - (A - A')^2. \end{array} \right. \quad (6)$$

Pour examiner la nature particulière de (Q), nature indépendante de la position de (D), nous prendrons, pour un instant, cet axe comme axe Oz, le point A étant à l'origine: l'équation de (Q) devient alors

$$x^2 + y^2 = 0;$$

faisceau des deux plans isotropes issus de (D)<sup>1</sup>.

De là le théorème suivant:

*La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre, dont les coefficients sont des formes linéaires des variables x, y, z, soit celle des conoïdes droits d'axe (D) est que la quadrique (Q) associée se réduise aux deux plans isotropes issus de (D).*

Supposons alors que cette propriété ait lieu: les solutions s'obtiennent sans intégration; et c'est là que réside tout l'intérêt. Il suffit de remarquer que, dans un système de référence où (D) est pris pour axe AZ, la solution générale s'écrit:

$$z = F\left(\frac{y}{x}\right),$$

et d'effectuer sur cette équation la substitution orthogonale convenable, qui rétablit les variables primitives.

*Remarque.* — Nous trouvons, à cette occasion, les 4 conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une quadrique se réduise à deux plans isotropes: ce sont les 3 conditions (6), jointes à la suivante:

$$\left| \begin{array}{cccc} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{array} \right| = 0.$$

<sup>1</sup> Une décomposition facile, effectuée sur (5), donnerait:

$$(x^2 + y^2)(x - a) - (\lambda \pm i\nu)(y - b) - (\lambda \mp i\nu)(z - c) = 0,$$

plans tangents au cône isotrope

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 0.$$

4. — *Surfaces pour lesquelles le W a une forme donnée.* — On peut se proposer de déterminer les surfaces (S) pour lesquelles l'intégrale double présente une forme déterminée, exprimant en particulier certaine quantité géométrique, étude analogue à celle que s'était proposée M. BUHL au sujet des volumes tournants. (*Nouvelles Annales*, 5<sup>me</sup> série, tome II, pages 10 et sqq.)

Soit ainsi, (D) étant pris pour axe Oz,

$$px + qy = \frac{k}{\varphi'(z)} \quad (7)$$

la fonction  $\varphi(z)$  étant fixée à l'avance; pour une certaine cloison prise sur une quelconque des surfaces intégrales de (7)

$$e^{\varphi(z)} = x^k \cdot f\left(\frac{y}{x}\right), \quad (8)$$

nous aurons

$$W = \frac{1}{2} k \iint_S \frac{dx \cdot dy}{\varphi'(z)}.$$

Etudions quelques formes particulières:

1<sup>o</sup>  $\varphi(z) = z$ .

Une cloison appartenant aux surfaces (S)

$$e^z = x^k \cdot f\left(\frac{y}{x}\right)$$

donne un volume conoïdal d'axe Oz proportionnel à l'aire plane  $S_z$ , projection de la cloison sur le plan  $xOy$ .

2<sup>o</sup>  $\varphi(z) = L \pmod{z}$ .

Une cloison appartenant aux surfaces (S)

$$z = x^k \cdot f\left(\frac{y}{x}\right)$$

donne un volume conoïdal proportionnel au volume  $U_z$  cylindrique compris entre la cloison et le plan  $xOy$ .

3<sup>o</sup>  $\varphi(z) = mL \pmod{(az + b)}$ .

Une cloison appartenant aux surfaces (S)

$$(az + b)^m = x^k \cdot f\left(\frac{y}{x}\right)$$

donne un volume conoïdal  $W$  d'axe  $Oz$  tel que

$$W = K_1 S_z + K_2 U_z ,$$

en posant

$$2K_1 = \frac{b \cdot k}{a \cdot m} , \quad 2K_2 = \frac{k}{m} .$$

Toutes ces surfaces (8) ont été envisagées à d'autres point de vue par M. V. JAMET (*Annales de l'Ecole Normale Supérieure: Sur les courbes et surfaces tétraédrales*, 1887). Ces surfaces sont celles pour lesquelles le segment  $\overline{OT}$ , déterminé sur l'axe des  $z$  par l'origine  $O$  et le plan tangent en  $M$ , est une fonction de  $z$ ; — ici

$$\overline{OT} = z - \frac{k}{\varphi'(z)} .$$

Leur auteur les a considérées comme type remarquable de surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par simple quadrature<sup>1</sup>. (A. BUHL, *loc. cit.*, page 62). Comme le fait remarquer M. Buhl, la propriété envisagée plus haut n'a lieu sûrement que pour des cloisons n'admettant aucun plan tangent parallèle à l'axe  $Oz$ : dans le cas contraire, l'intégrale double pourrait ne point conserver un sens dans les limites de l'intégration.

5. — *Volumes conoïdaux proportionnels, quant à 2 axes.* — Nous en arrivons actuellement à une question plus complexe, celle de la détermination des surfaces ( $S$ ) sur lesquelles on peut tracer des contours donnant, quant à deux axes ( $D_1$ ) et ( $D_2$ ), des volumes conoïdaux en rapport constant:

$$m_1 W_1 + m_2 W_2 = 0 . \quad (9)$$

Nous prendrons pour axe  $Oz$  la perpendiculaire commune aux deux axes ( $D$ ) et pour équations des deux axes

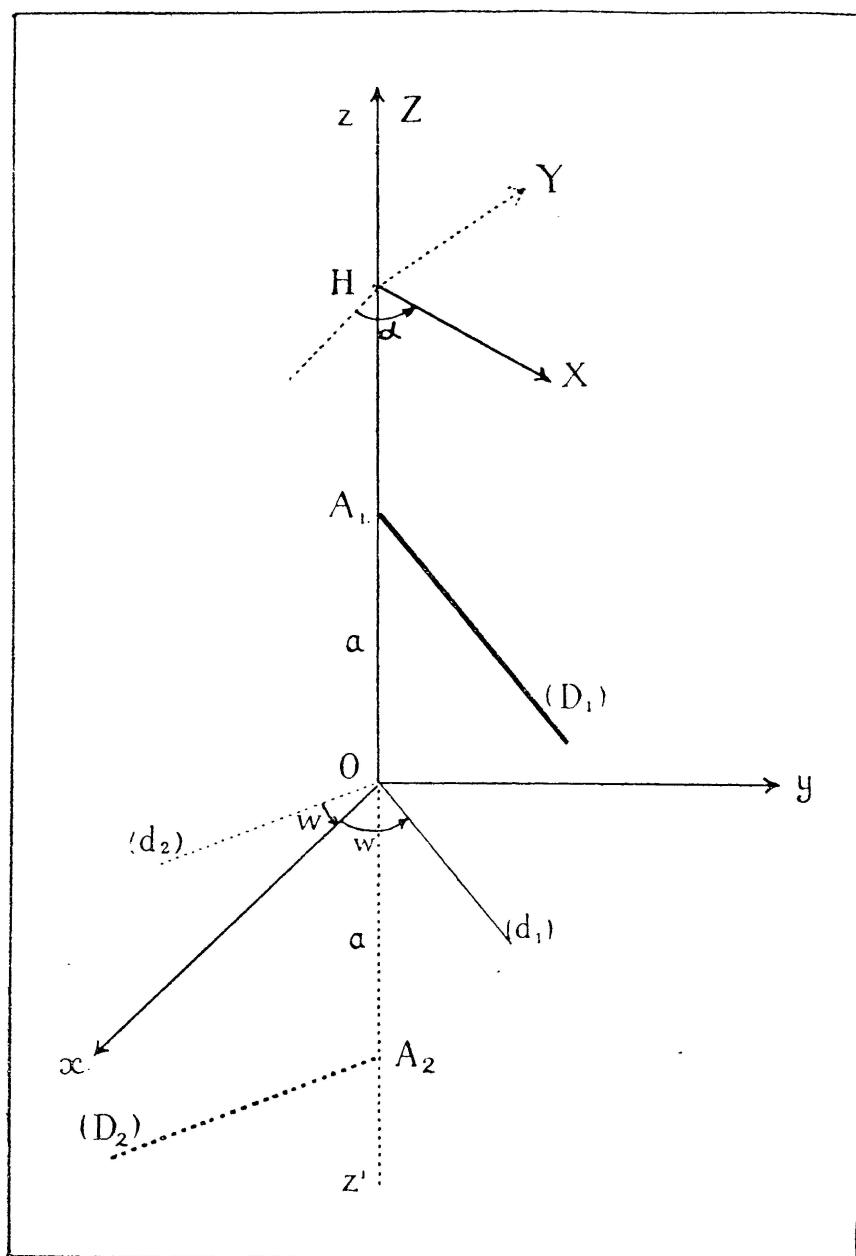
$$\begin{cases} z - a = 0 \\ x \cdot \sin \omega - y \cdot \cos \omega = 0 , \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} z + a = 0 \\ x \cdot \sin \omega + y \cdot \cos \omega = 0 . \end{cases}$$

<sup>1</sup> E. PICARD. *Traité d'Analyse*, t. I, chap. XIV.

Pour la disposition des axes de coordonnées, d'ailleurs classique, on se reportera à la figure.



L'équation (9) devient alors, en posant toutefois

$$k = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} ,$$

$$\alpha(x \cdot \sin^2 \omega + ky \cdot \sin \omega \cdot \cos \omega) + \beta(y \cdot \cos^2 \omega + kx \cdot \sin \omega \cdot \cos \omega) \\ + \gamma(z + ak) = 0 .$$

Le système intégral à considérer est le suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x \cdot \sin^2 \omega + ky \cdot \sin \omega \cdot \cos \omega, \\ \frac{dy}{dt} = y \cdot \cos^2 \omega + kx \cdot \sin \omega \cdot \cos \omega, \\ \frac{dz}{dt} = z + ak. \end{array} \right.$$

On en déduit, par des opérations connues,

$$\left\{ \begin{array}{l} (x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha)(x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha) = A \cdot e^t, \\ (x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha) : (x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha) = B \cdot e^{\lambda t}, \\ z = C \cdot e^t - ak, \end{array} \right.$$

en posant:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha &= k \cdot \operatorname{tg} 2\omega, \\ \lambda &= \cos 2\omega \cdot \sec 2\alpha = \sqrt{\cos^2 2\omega + k^2 \cdot \sin^2 2\omega}. \end{aligned} \quad (10)$$

Il est alors indiqué de faire le changement défini par la substitution orthogonale

$$\left\{ \begin{array}{l} X = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha, \\ Y = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha, \\ Z = z + ak; \end{array} \right. \quad (11)$$

l'équation des surfaces intégrales est ainsi:

$$z = XY \cdot F[X^{\lambda+1} \cdot Y^{\lambda-1}]. \quad (12)$$

Cette forme met en évidence une génération de ces surfaces par intersection des cylindres paraboliques généraux

$$X^{\lambda+1} \cdot Y^{\lambda-1} = C^{te}$$

et des paraboloïdes équilatères

$$\frac{X \cdot Y}{Z} = C^{te},$$

ces constantes étant liées par une relation arbitraire; dans la suite, nous verrons une définition plus intéressante au point de vue de l'Analyse, et qui s'applique à des solutions plus générales encore.

Toutes ces surfaces (12) admettent Z'Z, perpendiculaire commune aux deux axes (D) donnés, pour axe de symétrie; de plus, celles pour lesquelles

$$F[0^{k+1} \cdot 0^{k-1}] \neq \infty$$

contiennent X'X et Y'Y, qui constituent ainsi deux génératrices rectilignes fixes<sup>1</sup>.

Examinons quelques cas particuliers.

6. — *Cas d'axes (D) parallèles.* — Dans cette hypothèse l'angle  $\omega$  est nul, en sorte que

$$\lambda = 1,$$

et les surfaces sont les *conoïdes droits*

$$x = f\left(\frac{z + ak}{y}\right),$$

dont l'axe est généralement parallèle à X'X, et coïncide avec lui dans le cas de volumes équivalents.

L'intégration directe est au reste immédiate. Nous n'insisterons pas sur le résultat obtenu, car nous en verrons bientôt une généralisation.

7. — *Cas d'axes (D) orthogonaux.* — L'angle  $\omega$  étant égal à  $\frac{\pi}{4}$ , de telle sorte que

$$\lambda = k,$$

les solutions admettent pour équation:

$$Z = XY \cdot F[X^{k+1} \cdot Y^{k-1}].$$

Le système de référence est ici déduit du primitif par une translation ( $-ak$ ) equipollente à Z'Z, et une rotation  $\frac{\pi}{4}$  autour

<sup>1</sup> Si nous supposons que le rapport  $k$  varie, le lieu de ces deux génératrices s'obtient immédiatement d'après les relations:

$$x = y \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad ak + z = 0, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = k \cdot \operatorname{tg} 2w;$$

on en déduit, par élimination de  $k$ ,

$$z(x^2 - y^2) - 2axy \cdot \operatorname{cot} 2w = 0.$$

C'est un conoïde droit d'axe Z'Z, et transformé du conoïde de Plücker dans la transformation:

$$x' = x, \quad y' = iy, \quad z' = iz.$$

de cet axe: c'est ainsi un mouvement hélicoïdal d'axe Z'Z dont la rotation composante ne dépend pas de  $k$  ( $k \neq 0$ ).

Dans le cas où  $k$  est nul, c'est à-dire où les volumes sont équivalents, les surfaces intégrales

$$z = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}\right)$$

sont des *surfaces de Jamet*, dont la nature est indépendante de la distance des axes conoïdaux.

Il est aisé de voir que c'est le seul cas où les surfaces (12) se réduisent à des surfaces de Jamet: car  $\lambda$  ne saurait être nul que si  $\cos 2\omega$  et  $k$  le sont simultanément.

8. — *Cas de volumes équivalents.* — 1°  $m_2 = m_1$ , c. à d.  $k = 0$ .

L'intégration directe du système correspondant donne pour solution générale

$$z^{\sin^2 \omega} = x \cdot F[x^{-\cos^2 \omega} \cdot y^{\sin^2 \omega}] .$$

Les surfaces intégrales ne dépendent pas de la distance  $2a$  des axes (D): on peut donc, sans changer le rapport des volumes, déplacer parallèlement à eux-mêmes les deux axes conoïdaux.

2°  $m_2 = m_1$ , c. à d.  $k = \infty$ .

On trouve alors pour équation des surfaces

$$\exp\left(\frac{z}{2a} \cdot \sin 2\omega\right) = (x + y) \cdot F(x^2 - y^2) ,$$

qui, par une rotation de  $\frac{\pi}{4}$  autour de Z'Z, se ramène au type

$$e^z = X^{\circ} F[XY] ,$$

en posant

$$\rho = \frac{2a}{\sin 2\omega} .$$

9. — Ayant maintenant précisé la nature des surfaces sur lesquelles se peuvent tracer les contours (C), examinons quelque peu la réciproque; nous rechercherons les couples d'axes (D) pour des surfaces (12) données.

Rappelons que, prenant pour trièdre de référence HXYZ

(fig. 1), les équations des deux droites ( $D_1$ ) et ( $D_2$ ) sont respectivement :

$$\begin{cases} Y = X \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \omega) , \\ Z = a(k + 1) , \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} Y = X \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \omega) , \\ Z = a(k - 1) , \end{cases}$$

en sorte que

$$\begin{aligned} \overline{HA}_1 &= a(k + 1) , \\ \overline{HA}_2 &= a(k - 1) . \end{aligned}$$

Les couples d'axes ( $D$ ) s'obtiennent donc en groupant deux à deux les éléments de la congruence rectiligne rencontrant orthogonalement  $Z'Z$ . Si d'ailleurs les indices  $m$  sont fixés, la correspondance entre les points  $A_1$  et  $A_2$  est homothétique, car :

$$\frac{\overline{HA}_2}{\overline{HA}_1} = \frac{k - 1}{k + 1} = - \frac{m_2}{m_1} .$$

Plus particulièrement, fixons l'un des axes, ( $D_1$ ) par exemple de telle façon que :

$$\begin{cases} h = a(k + 1) , \\ u = \operatorname{tg}(\alpha + \omega) , \end{cases} \quad (13)$$

et recherchons le lieu des axes ( $D_2$ ) qui lui correspondent. Que ce lieu soit un conoïde droit d'axe  $Z'Z$ , nous n'en doutons pas, d'après ce qui précède; nous allons voir qu'il s'agit du conoïde de Plücker, ainsi envisagé sous un jour nouveau après tant d'autres<sup>1</sup>. Les équations de ( $D_2$ ) s'écrivent en effet, moyennant (13),

$$\begin{cases} Y = X \cdot \operatorname{tg}(\alpha - \omega) , \\ Z = h \cdot \frac{k - 1}{k + 1} ; \end{cases}$$

d'autre part, de

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{tg}(\alpha + \omega) , \\ v &= \operatorname{tg}(\alpha - \omega) , \end{aligned}$$

<sup>1</sup> C'est ainsi que, dans une question analogue concernant des volumes tournants proportionnels, le cylindroïde m'était apparu comme lieu d'axes hélicoïdaux : voir A. BUHL, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 5<sup>me</sup> série, tome II, page 334.

jointes à (10), résulte la relation

$$\nu(1+u^2) + u(1+\nu^2) \cdot \frac{k+1}{k-1} = 0.$$

De là l'équation du lieu cherché, obtenue en éliminant  $k$  et  $\nu$ :

$$Z \cdot (X^2 + Y^2) + N \cdot XY = 0,$$

avec

$$N = h \cdot \frac{1+u^2}{u}.$$

C'est un conoïde de Plücker; il contient, remarquons-le, l'axe ( $D_1$ ) lui-même, et se déplace homothétiquement avec lui.

10. — *Position d'un problème plus général.* — Généralisant la question précédemment résolue, il conviendrait de rechercher les surfaces supportant des contours fermés ( $C$ ) tels que:

$$m_1 W_1 + m_2 W_2 + \dots + m_i W_i + \dots + m_k W_k = 0, \quad (14)$$

où les  $m$  sont des constantes données et les  $W$  les volumes conoïdaux relatifs à ( $C$ ) et aux divers axes

$$(D_1), (D_2), \dots, (D_i), \dots, (D_k),$$

de l'espace.

Formons l'équation différentielle du problème: le calcul est analogue à ceux des §§ 3 et 5. En posant:

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \sum m_i (\mu_i^2 + \nu_i^2), \quad A' = \sum m_i (\nu_i^2 + \lambda_i^2), \quad A'' = \sum m_i (\lambda_i^2 + \mu_i^2), \\ B = -\sum m_i \mu_i \nu_i, \quad B' = -\sum m_i \mu_i \nu_i, \quad B'' = -\sum m_i \lambda_i \mu_i, \\ -C = \sum m_i (\mu_i^2 + \nu_i^2) a_i - \sum m_i \lambda_i \mu_i b_i - \sum m_i \lambda_i \nu_i c_i, \\ -C' = \Sigma \dots \\ -C'' = \Sigma \dots \end{array} \right. \quad (15)$$

avec des notations qui se précisent d'elles-mêmes, le résultat rappelle, par son aspect, l'équation (4):

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha (Ax + B''y + B'z + C) \\ + \beta (B''x + A'y + Bz + C') \\ + \gamma (B'x + By + A''z + C'') = 0. \end{array} \right. \quad (16)$$

Mais il y a, avec (4), une différence essentielle: les coefficients A, B, C, sont indépendants; la quadrique (Q), d'équation (5), est de la forme la plus générale.

L'intégration de (16) ne présente aucune difficulté théorique, et dépend de la résolution de l'équation en S de (Q). Mais les calculs sont pratiquement inextricables; aussi n'examinerons-nous ici que quelques cas qui, pour être moins généraux, n'en offrent pas moins un certain intérêt.

Auparavant, faisons une courte remarque: Soit à effectuer, pour une cloison donnée, le calcul de la somme

$$S(W) = m_1 W_1 + \dots + m_k W_k$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2} \int \int [\alpha \cdot F + \beta \cdot G + \gamma \cdot H] \cdot d\sigma ,$$

F, G, H, désignant les coefficients de  $\alpha, \beta, \gamma$  dans (16).

Cette intégration n'est, en général, point réductible à une intégrale simple par transformation stokienne: on doit avoir

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0$$

ou

$$A + A' + A'' = 2 \cdot \sum m_i = 0 .$$

*Sous cette seule condition, que la somme des indices soit nulle, l'intégrale double se transforme en une intégrale simple.* De là un moyen d'obtenir une foule d'expressions

$$P(x, y, z) dx + Q dy + R dz$$

différentielles exactes sur les surfaces, en particulier sur (12).

11. — *Axes parallèles à une même direction.* — Prenant cette direction pour axe Oz,

$$\lambda_i = 0 , \quad \mu_i = 0 , \quad \nu_i = 1 , \quad c_i = 0 ;$$

par suite, en (16),

$$\left\{ \begin{array}{l} A = A' = \sum m_i = M , \quad A'' = 0 , \\ B = B' = B'' = 0 , \\ -C = \sum m_i a_i , \quad -C' = \sum m_i b_i , \quad C'' = 0 . \end{array} \right.$$

Le système intégral correspondant à (16)

$$\frac{dx}{Mx + C} = \frac{dy}{My + C'} = \frac{dz}{0}$$

admet pour solution

$$z = f \left[ \frac{My + C'}{Mx + C} \right]$$

On reconnaît l'équation générale des surfaces conoïdes-droits ayant pour axe la droite

$$\begin{cases} x = -\frac{C}{M} \\ y = -\frac{C'}{M} \end{cases}$$

C'est la parallèle à Oz issue du centre des distances proportionnelles des points  $A_i (a_i, b_i, c_i)$ : en d'autres termes, si l'on fait correspondre à chaque volume conoidal un vecteur supporté par l'axe ( $D_i$ ) correspondant, d'origine  $A_i$  et d'intensité  $m_i$ , l'axe des surfaces coïncide avec le support ( $\Delta$ ) de leur résultante.

De tout ceci résulte encore une intéressante conséquence: on sait que, dans le cas général, les volumes conoidaux  $W_D$  et  $W_\Delta$  relatifs à un même contour ( $C$ ) et à deux axes parallèles ( $D$ ) et ( $\Delta$ ),

$$2(W_D - W_\Delta) = \delta \cdot \sigma,$$

$\delta$  étant la distance des axes,  $\sigma$  la projection du contour ( $C$ ) sur le plan passant par ( $\Delta$ ) normalement au plan des axes (A. BUHL, *loc. cit.*, page 60).

Dans le cas actuel,  $W_\Delta$  est nul, et

$$W_{D_i} = \frac{1}{2} \cdot \delta_i \cdot \sigma_i,$$

d'où l'on déduit, d'après (14),

$$\sum m_i \delta_i \sigma_i = 0.$$

En particulier, lorsque les  $m_i$  sont égaux,

$$\sum m_i \sigma_i = 0;$$

plus particulièrement encore, en supposant les axes ( $D_i$ ) dans un même plan, l'axe des conoïdes y est situé et

$$\sum m_i \delta_i = 0 .$$

$\sigma_i$  étant le même pour tous ces axes.

12. — *Axes parallèles à un même plan.* — Prenant ce plan pour plan des  $xy$ ,

$$\lambda_i = \cos \alpha_i , \quad \mu_i = \sin \alpha_i , \quad \nu_i = 0 ,$$

d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \sum m_i \cdot \sin^2 \alpha_i , \quad A' = \sum m_i \cdot \cos^2 \alpha_i , \quad A'' = A + A' = \sum m_i , \\ B = B' = 0 , \quad B'' = - \sum m_i \sin \alpha_i \cdot \cos \alpha_i . \\ C = \dots , \quad C' = \dots , \quad C'' = \dots \end{array} \right.$$

Le système à résoudre est alors

$$\frac{dx}{Ax + B''y + C} = \frac{dy}{B''x + A'y + C'} = \frac{dz}{A''z + C''} .$$

. Les surfaces intégrales satisfont à:

$$z = XY \cdot F \left[ X^{\frac{\delta}{A''}-1} \cdot Y^{\frac{\delta}{A''}+1} \right] ,$$

les nouvelles variables étant définies par la substitution orthogonale

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau X = \frac{1}{2} (A' - A + \delta) x_1 - B'' y_1 , \\ \tau Y = \frac{1}{2} (A' - A - \delta) x_1 - B'' y_1 , \\ Z = z + \frac{C''}{A''} \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\tau^2} = (A' - A + \delta)^2 + B''^2 , \\ \delta^2 = (A' - A)^2 + 4B''^2 , \\ x_1 = x + \frac{A'C - C'B''}{AA' - B''^2} , \\ y_1 = y + \frac{AC' - CB''}{AA' - B''^2} . \end{array} \right.$$

On parvient encore aux mêmes surfaces (12), pour lesquelles a seule changé la situation dans l'espace: le dernier cas examiné au § 12 est contenu dans celui-ci, de même que celui du § 5.

13. — Les surfaces que nous avons rencontrées en (8) et (12)

$$e^{\varphi(z)} = x^k f\left(\frac{y}{x}\right), \quad (8)$$

$$z = xy \cdot f(x^{\lambda-1} y^{\lambda+1}) \quad (12)$$

rentrent toutes dans un type remarquable d'équation générale

$$\Phi(z) = xy \cdot F(x^m y^n), \quad (17)$$

et qui vérifie l'équation différentielle linéaire

$$pnx - qmy = \varphi(z) \quad (18)$$

avec

$$\Phi(z) = e^{(n-m)\int \frac{dz}{\varphi(z)}}$$

ou inversement

$$\varphi(z) = (n - m) \cdot \frac{\Phi(z)}{\Phi'(z)}.$$

La considération de cette équation (18) met en évidence une propriété caractéristique des surfaces intégrales, quant à leur plan tangent, propriété qui peut, indépendamment des exposés actuels, être prise pour définition de (17). Pour l'établir, il suffit de comparer l'équation (18) avec celle

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

du plan tangent en M ( $x, y, z$ ). On voit alors que, si nous faisons correspondre à M le point P de ce plan ayant pour coordonnées, en projection sur Oxy,

$$\begin{cases} X = (1 + n) \cdot x, \\ Y = (1 - m) \cdot y, \end{cases}$$

la projection  $p$  de P est obtenue à partir de  $m(x, y, 0)$  par de simples dilatations de coordonnées, en particulier par homothétie lorsque

$$n + m = 0.$$

*La cote de P a pour expression*

$$Z = \overline{p^P} = z + \varphi(z) ,$$

c'est-à-dire une fonction de la seule cote  $z$  du point de contact M.

Pour les surfaces (8), en lesquelles

$$n = 1 , \quad m = -1 ,$$

le point  $p$  vient se confondre avec O, ce qui conduit à la définition déjà donnée des surfaces de Jamet.

Enfin, si

$$\Phi(z) = z ,$$

d'où

$$\varphi(z) = (n - m) \cdot z ,$$

il existe un rapport constant entre les cotes Z et  $z$  des points P et M:

$$\frac{\overline{p^P}}{mM} = 1 + n - m .$$

Dans le cas des surfaces (12), ce rapport est égal à 3, donc indépendant de  $\lambda$ . D'où ce résultat:

*Quel que soit le rapport des volumes conoïdaux, la cote du point M(x, y, z) d'une surface intégrale est égale au tiers de celle du point [(2 + λ)x, (2 - λ)y, ...] du plan tangent en M.*

Lorsque  $\lambda$  varie, on vérifie facilement que le point  $p$  décrit une droite, symétrique de Om en direction par rapport aux axes Ox, Oy et passant par l'homothétique de  $m$  par rapport à O dans le rapport 2.

Considérons maintenant les surfaces d'équation

$$z = xy \cdot F(x^m y^n) . \quad (19)$$

Nous allons montrer qu'elles constituent un type général dont les lignes asymptotiques s'intègrent par quadrature.

Posant

$$u = x^m y^n ,$$

de sorte que

$$\frac{du}{u} = m \cdot \frac{dx}{x} + n \cdot \frac{dy}{y} , \quad (20)$$

on trouve:

$$\left\{ \begin{array}{l} r = m \cdot \frac{y}{x} \cdot R(u) , \\ s = S(u) , \\ t = n \cdot \frac{x}{y} T(u) , \end{array} \right.$$

$R$ ,  $S$ ,  $T$ , étant des fonctions de la seule variable  $u$ . Les asymptotiques sont obtenues en intégrant l'équation

$$m \cdot \frac{y}{x} \cdot R(u) \cdot dx^2 + 2 \cdot S(u) \cdot dx \cdot dy + n \cdot \frac{x}{y} \cdot T(u) \cdot dy^2 = 0 .$$

de laquelle on tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-S(u) \pm \sqrt{S^2(u) - mn \cdot R(u) \cdot T(u)}}{n \cdot \frac{x}{y} \cdot T(u)}$$

du

$$n \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \left\{ \begin{array}{l} U_1(u) \\ U_2(u) \end{array} \right. \quad (21)$$

D'après (20),

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u[m + U(u)]}$$

et, en portant dans (21) où les variables sont alors séparées,

$$x = C \cdot e^{\int \frac{du}{u[m + U(u)]}}$$

Cette unique quadrature fournit les lignes cherchées<sup>1</sup>.

Nous terminerons cette étude par la propriété suivante:

*Les surfaces (19) se transforment les unes dans les autres par transformation polaire réciproque dont la quadrique directrice est le paraboloïde de révolution*

$$x^2 + y^2 = 2z .$$

<sup>1</sup> Cette propriété d'intégrabilité par quadrature s'étend d'ailleurs au cas où

$$\Phi(z) = \alpha z + \beta .$$

Il s'agit ici d'une propriété générale des surfaces: lorsque les asymptotiques d'une surface

$$z = f(x, y)$$

s'obtiennent par quadrature, il en est de même des surfaces

$$\alpha z + \beta = f(x, y) .$$

Effectuons en effet sur (19) la transformation de Legendre:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = x, \\ Y = y, \\ Z = -z + px + qy; \end{array} \right.$$

Il vient, pour équation des transformées,

$$Z = XY \cdot G(X^m Y^n),$$

étant posé

$$G(X^m Y^n) \equiv G(x^m y^n) \equiv G(u) \equiv F(u) + (m+n) u F'(u),$$

ce qui démontre la proposition.

En particulier, lorsque

$$F(u) + (m+n) u F'(u) = F(u),$$

les surfaces se transforment en elles-mêmes. Ceci a lieu dans deux alternatives:

1] lorsque

$$F'(u) = 0,$$

c'est-à-dire pour *les paraboloïdes équilatères*

$$xy = \lambda z;$$

2] lorsque

$$m = -n,$$

c'est-à-dire pour des *surfaces de Jamet*

$$z = xy \cdot f\left(\frac{y}{x}\right),$$

ce dernier cas étant assurément le plus intéressant.

Strasbourg, mars 1925.