Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 24 (1924-1925)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: COMBIEN PASSE-T-IL DE LIGNES DE COURBURE PAR UN OMBILIC ?

Autor: Winants, Marcel

Kapitel: Trajectoires orthogonales.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515766

particuliers du problème bien connu des trajectoires orthogonales, cas auxquels nous comparerons l'ensemble des deux systèmes de lignes de courbure de certaines surfaces. Nous nous occuperons ensuite d'ombilics relativement simples, et nous examinerons enfin les ombilics spéciaux, que nous avons mis en évidence en 1922, dans un mémoire qu'a publié *L'Enseignement mathématique* (22e année).

Trajectoires orthogonales.

α) Si les axes coordonnés sont rectangulaires, les parallèles à l'axe des x ($y = C_1$) ont comme trajectoires les parallèles à l'axe des y ($x = C_2$). Par chaque point du plan, il passe une et une seule droite de chacune des deux familles. *A distance finie* aucun point *réel* du plan ne se singularise.

β) Les droites issues de l'origine ou du pôle ($\omega = C_1$) ont comme trajectoires des circonférences concentriques ($\rho = C_2$). Par chaque point *réel* du plan il passe une et une seule des circonférences considérées; par tout point distinct du pôle, on ne peut mener qu'une seule droite de la famille envisagée. Mais toutes les droites de cette famille concourent au pôle qui nous apparaît ainsi comme un point singulier.

γ) Soient les différentes circonférences passant par deux points fixes:

$$x^2 + y^2 + my - a^2 = 0 \;;$$

l'équation différentielle des trajectoires orthogonales peut s'écrire

$$(y^2)' - \frac{1}{x} \cdot (y^2) = -x + \frac{a^2}{x} \;;$$

c'est une équation linéaire du premier ordre, dont voici l'intégrale générale:

$$x^2 + y^2 - nx + a^2 = 0 \;;$$

et l'on retrouve un résultat classique (Cf. *Cours de Géométrie analytique plane* de Falisse-Gob; Bruxelles, Lebègue, 1912; pp. 208-212). Par chaque point du plan passe un et un seul cercle n; tous ces cercles forment un faisceau dont les points limites de Poncelet sont les deux points fixes où se croisent tous les cercles m *(Sections coniques* de Salmon); par tout point du plan, distinct des points limites, passe un et un seul cercle m. Les deux points limites sont donc deux points singuliers.

δ) Considérons enfin le cas si bien connu des coniques homofocales; si l'on suppose $\lambda^2 > c^2 > \mu^2 > 0$, les ellipses

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$$

ont pour trajectoires les hyperboles

$$\frac{x^2}{\mu^2} - \frac{y^2}{c^2 - \mu^2} = 1 \quad ;$$

par chaque point *réel* du plan on peut mener une et une seule ellipse λ, une et une seule hyperbole μ. Il n'y a que deux exceptions: en chacun des points $y = 0$, $x = \pm c$, l'ellipse et l'hyperbole dégénèrent en une seule et même droite. Ces deux points sont singuliers, mais présentent une singularité tout à fait différente de celles que nous avons rencontrées aux paragraphes β) et γ).

OMBILICS ET LIGNES DE COURBURE.

1. — *Plan et sphère.* Pour ces deux surfaces le problème des lignes de courbure ne prend un sens précis que si l'on adopte pour ces lignes la définition que nous avons rappelée plus haut. Alors chaque ligne de la surface est une ligne de courbure, et tous les points sont des ombilics. On sait que ce sont les seules surfaces qui jouissent de cette propriété.

2. — *Tore.* Toutes les lignes de courbure sont circulaires; et le tore ne possède aucun ombilic. La disposition des lignes de courbure et leurs relations mutuelles rappellent la configuration α) dont il s'est agi plus haut.

3. — *Hyperboloïde de révolution.* Tout se passe ici comme pour le tore, à cela près que, si les lignes de courbure de l'une des familles sont encore circulaires, les autres sont hyperboliques.

4. — *Paraboloïde de révolution.* Les lignes de courbure des deux familles, qui sont respectivement des paraboles et des circonférences, rappellent la disposition β) des coordonnées polaires du