Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 24 (1924-1925)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: QUELQUES MÉTHODES DE GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE

Autor: Rice, C. D.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515765

QUELQUES MÉTHODES DE GÉOMÉTRIE INTRINSÈQUE

PAR

C. D. RICE (University of Texas).

Nous nous proposons de montrer dans cette Note comment l'introduction de certains vecteurs-unité dans les méthodes de la géométrie intrinsèque permet de simplifier l'étude des propriétés des surfaces et des courbes tracées sur les surfaces. Le lecteur se rendra compte de l'avantage que présente l'emploi de ces vecteurs sur les méthodes des coordonnées rectangulaires et sur l'usage des paramètres différentiels. Quelques-uns des résultats obtenus seront tout à fait généraux et comprendront comme cas particuliers des propriétés bien connues.

En considérant sur la surface des lignes non rectangulaires, nous établissons des relations générales relatives à deux courbes tracées sur une surface. Pour terminer, nous ajoutons quelques théorèmes bien connus permettant d'illustrer la valeur des méthodes développées.

1. Soit une surface donnée par

$$x = x(u, v) , \tag{1}$$

où x est un vecteur mené de l'origine O à un point P de la surface. Le vecteur x est donné au moyen de deux variables scalaires u et v. Lorsque u et v sont fonctions d'une seule variable s, le point P décrira une courbe sur la surface. Dans cette étude, la quantité s représentera la longueur de l'arc de courbe mesurée à partir d'un point arbitraire. Différentes courbes sur la surface seront indiquées par S_k, S_r ou S_1, S_2, etc.

Lorsque la courbe est déterminée par S_k, la dérivée $\frac{dx}{ds_k}$ est un vecteur-unité le long de la tangente à la courbe au point P.

Soit a le vecteur-unité normal à la surface au point P. Il est aussi fonction de u et v et, le long de la courbe S_k nous pouvons aussi prendre la dérivée $\frac{da}{ds_k}$.

Posons pour abréger:

$$x_r = \frac{dx}{ds_r}, \quad x_2 = \frac{dx}{ds_2}, \quad a_i = \frac{da}{ds_i}.$$

En désignant par S le symbole du produit scalaire de deux vecteurs, on peut écrire

$$Sx_r x_r = 1, \quad Saa = 1, \quad Saa_r = 0, \quad Sada = 0, \quad Sax_r = 0. \tag{2}$$

Par dérivation, on voit que

$$\left\{ \begin{aligned} x_k &= \frac{dx}{ds_k} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds_k} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds_k}, \\ a_r &= \frac{da}{ds_r} = \frac{\partial a}{\partial u}\frac{du}{ds_r} + \frac{\partial a}{\partial v}\frac{dv}{ds_r}. \end{aligned} \right. \tag{3}$$

En utilisant les relations (2) et (3) on peut facilement prouver [1] que

$$Sa_r x_k = Sa_k x_r. \tag{I}$$

Cette identité est d'une grande importance dans la discussion

---

[1] Démonstration de la relation fondamentale I

$$\begin{aligned} Sa_1x_2 - Sa_2x_1 &= S\left(\frac{\partial a}{\partial u}\frac{du}{ds_1} + \frac{\partial a}{\partial v}\frac{dv}{ds_1}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\delta u}{\delta s_2} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\delta v}{\delta s_2}\right) \\ &\quad - S\left(\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\delta u}{\delta s_2} + \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\delta v}{\delta s_2}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds_1} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds_1}\right) \\ &= \left[S\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - S\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}\right]\left[\frac{du}{ds_1}\frac{\delta v}{\delta s_2} - \frac{dv}{ds_1}\frac{\delta u}{\delta s_2}\right]. \end{aligned}$$

Mais d'après (2) on sait que

$$Sa\frac{\partial x}{\partial u} = 0 \quad \text{et} \quad Sa\frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

et, par suite, on voit que

$$S\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + Sa\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0 \quad \text{et} \quad S\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + Sa\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} = 0,$$

et par conséquent

$$S\frac{\partial a}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - S\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = Sa\left[\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right].$$

D'où $Sa_1x_2 - Sa_2x_1 = 0$.

des relations concernant les courbes tracées sur une surface et, en s'y référant, dans la suite, nous l'appellerons, la relation fondamentale de la géométrie intrinsèque.

A la place de l'expression désignée habituellement par E, F, G, nous ferons usage des suivantes

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{H}_r = \mathrm{S}a_r x_r\,, \quad \mathrm{T}_k = \mathrm{S}aa_k x_k\,, \quad \mathrm{B}_{rs} = \mathrm{S}a_r x_s = \mathrm{S}a_s x_r\,, \\ \mathrm{K}_{rs} = \mathrm{S}aa_r a_s\,, \quad \mathrm{A}_{rk} = \mathrm{S}aa_r x_k - \mathrm{S}aa_k x_r\,. \end{array}\right. \tag{4}$$

On remarquera que la quantité H_r est l'expression habituelle de la courbure de la section normale au point P et que T_k est la torsion géodésique de la courbe en ce point. La signification de B_{rs}, A_{rk} et K_{rs} sera donnée plus tard.

Lorsque les courbes S_r et S_k font entre elles un angle θ, les relations suivantes sont évidentes

$$\mathrm{S}x_r x_k = \cos\theta\,, \quad \mathrm{S}ax_r x_k = \sin\theta\,, \quad \mathrm{V}x_r x_k = a\sin\theta\,, \tag{5}$$

V étant le symbole du produit vectoriel.

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a

$$\mathrm{S}x_r x_k = 0\,, \quad \mathrm{S}ax_r x_k = 1\,, \quad \mathrm{V}x_r x_k = a\,. \tag{6}$$

En parlant de l'angle $(\mathrm{X}_r \mathrm{X}_k)$, il est convenu que l'angle est formé en mesurant de X_r à X_k dans le sens positif.

2. *Relations entre deux courbes tracées sur une surface.* — Soient deux courbes S_r et S_k se coupant en formant un angle $(\mathrm{X}_r\,\mathrm{X}_k) = \theta$ et soit également un angle $(\mathrm{X}_r\,\mathrm{X}_i) = \frac{\pi}{2}$. Alors[1]

$$\begin{aligned} \mathrm{S}a_r x_k &= \mathrm{S}a_r x_k \mathrm{S}ax_r x_i\,, \qquad \text{d'après (6)} \\ &= \mathrm{S}x_k x_r \mathrm{S}aa_r x_i + \mathrm{S}x_k x_i \mathrm{S}ax_r a_r\,, \\ &= \cos\theta\,\mathrm{S}a_r x_r - \sin\theta\,\mathrm{T}_r \quad \text{puisque} \quad x_r = \mathrm{V}x_i a \\ &= \mathrm{H}_r\cos\theta - \mathrm{T}_r\sin\theta\,. \end{aligned} \tag{7}$$

De même

$$\mathrm{S}a_k x_r = \mathrm{H}_k\cos\theta + \mathrm{T}_k\sin\theta\,. \tag{8}$$

[1] Dans cette étude, on utilisera les identités vectorielles suivantes:

$$d\mathrm{S}abc = a\mathrm{S}dbc + b\mathrm{S}adc + c\mathrm{S}abd \tag{a}$$
$$\mathrm{SV}pq\mathrm{V}rs = \mathrm{S}pr\,\mathrm{S}qs - \mathrm{S}ps\,\mathrm{S}qr\,. \tag{b}$$

De (7), (8) et I résulte la relation importante

$$(H_r - H_k)\cos\theta = (T_r + T_k)\sin\theta\ . \tag{9}$$

Puis, pour les deux courbes $S_r S_k$,

$$\begin{aligned} Saa_r x_k &= SVx_r x_i Va_r x_k\ , \quad \text{puisque} \quad a = Vx_r x_i\ , && (10)\\ &= Sa_r x_r Sx_i x_k - Sx_r x_k Sa_r x_i\ ,\\ &= H_r \sin\theta + \cos\theta\, Saa_r x_r \quad \text{puisque} \quad x_i = Vax_r\\ &= H_r \sin\theta + T_r \cos\theta\ . \end{aligned}$$

De même

$$Saa_k x_r = - H_k \sin\theta + T_k \cos\theta\ . \tag{11}$$

D'après (10) et (11) on voit que

$$A_{rk} = Saa_r x_k - Saa_k x_r = (H_r + H_k)\sin\theta + (T_r - T_k)\cos\theta\ . \tag{12}$$

Pour une courbe S_r on peut trouver que

$$\begin{aligned} Sa_r a_r &= Sa_r a_r Sax_r x_i \quad \text{d'où angle } (x_r x_i) = \frac{\pi}{2} && (13)\\ &= Sa_r x_r Saa_r x_i + Sa_r x_i Sax_r a_r\ ,\\ &= H_r Sa_r Vx_i a - T_r Sa_r Vax_r\ , \quad \text{puisque} \quad x_i = Vax_r\ ,\\ &= H_r Sa_r x_r + T_r Saa_r x_r\ ,\\ &= H_r^2 + T_r^2\ . \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} \sin\theta\, Sa_r a_r &= Sa_r a_r Sax_r x_k\ , && (14)\\ &= Sa_r x_r Saa_r x_k + Sa_r x_k Sax_r a_r\ ,\\ &= H_r Saa_r x_k + Sa_k x_r Sax_r a_r \quad \text{d'après I}\\ &= H_r Saa_r x_k + Sx_r x_r Saa_k a_r + Sx_r a_r Sax_r a_k\\ &= H_r (Saa_r x_k - Saa_k x_r) - Saa_r a_k\\ &= H_r A_{rk} - K_{rk} \end{aligned}$$

et de (13) et (14) on obtient

$$\sin\theta\left(H_r^2 + T_r^2\right) = H_r A_{rk} - K_{rk}\ . \tag{15}$$

On voit également que

$$K_{rk} = Saa_r a_k\ ,$$

ou

$$\sin\theta\, K_{rk} = SVx_r x_k Va_r a_k\,, \quad \text{puisque} \quad a \sin\theta = Vx_r x_k\,,$$
$$= Sa_r x_r Sa_k x_k - Sa_r x_k Sa_k x_r\,,$$

$$\sin\theta\, K_{rk} = H_r H_k - (Sa_r x_k)^2\,, \quad \text{d'après I}\,. \tag{16}$$

Les relations (9), (12), (15), (16) sont tout à fait générales et contiennent de nombreux cas particuliers. On en déduit des relations importantes relatives aux deux courbes.

3. *Cas particuliers* de (10), (12), (15) et (16).

Lorsque l'angle $(X_r\, X_k) = \frac{\pi}{2}$, on trouve

$$T_r + T_k = 0 \tag{9'}$$

$$A_{rk} = H_r + H_k \tag{12'}$$

$$H_r^2 + T_r^2 = H_r A_{rk} - K_{rk} \tag{15'}$$

$$K_{rk} = H_r H_k - T_r^2\,, \quad \text{puisque dans ce cas} \quad x_k = Vax_r\,. \tag{16'}$$

Lorsque les deux courbes X_r et X_k sont à angle droit et sont situées également le long de lignes de courbure, on sait que $T_r = T_k = 0$, et dans ce cas les quantités H_r et H_k sont généralement données par

$$H_r = \frac{1}{R_r}\,, \qquad H_k = \frac{1}{R_k}\,.$$

Dans ce dernier cas (9′) (12′) (15′) (16′) deviennent

$$T_r = 0\,, \qquad T_k = 0 \tag{9''}$$

$$A_{rk} = \frac{1}{R_r} + \frac{1}{R_k} = 2h \tag{12''}$$

$$\frac{1}{R_r^2} = \frac{1}{R_r}\left(\frac{1}{R_r} + \frac{1}{R_k}\right) - \frac{1}{R_r}\cdot\frac{1}{R_k}\,, \tag{15''}$$

$$k = \frac{1}{R_r}\cdot\frac{1}{R_k}\,. \tag{16''}$$

Dans cette dernière formule, nous désignons par k la courbure de Gauss et par h la courbure moyenne.

L'équation (15″) montre que $\frac{1}{R_r}$ satisfait à la relation

$$\frac{1}{R^2} - 2h\frac{1}{R} + k = 0 \tag{17}$$

et nous pouvons montrer également que $\frac{1}{R_k}$ satisfait à la même équation.

4. *De quelques invariants.* — *a*) Soient deux courbes $S_1 S_2$ tracées sur la surface et passant par P en faisant un angle $(X_1 X_2) = \varphi$, et soient S_3 S_4 deux autres courbes passant par le même point et formant un angle $(X_3 X_4) = \theta$. Alors

$$\begin{aligned} \sin\varphi\, Saa_3a_4 &= SVx_1x_2Va_3a_4 \ , \quad \text{puisque} \quad Vx_1x_2 = a\sin\theta \ , & (18)\\ &= Sa_3x_1Sa_4x_2 - Sa_3x_2Sa_4x_1 \ , \\ &= Sa_1x_3Sa_2x_4 - Sa_2x_3Sa_1x_4 \ , \quad \text{d'après I} \ , \\ &= SVx_3x_4Va_1a_2 \ , \\ &= \sin\theta\, Saa_1a_2 \ . \end{aligned}$$

Lorsque $\theta = \varphi$, cette relation devient

$$Saa_3a_4 = Saa_1a_2 \ . \tag{19}$$

Par conséquent, K_{rs} est un invariant absolu pour deux courbes quelconques se coupant sous le même angle.

Si, de plus, les courbes S_1 et S_2 dans (19) sont des lignes de courbure, alors $\theta = \varphi = \frac{\pi}{2}$ et d'après (16″)

$$Saa_3a_4 = k \ , \tag{20}$$

où les courbes $S_3 S_4$ sont deux courbes quelconques sur la surface se coupant à angle droit.

Revenant maintenant à (18), soient $S_1 S_2$ deux courbes à angle droit, par (20) on a $Saa_1a_2 = k$ et, par suite,

$$K_{34} = Saa_3a_4 = k\sin\theta$$

où l'angle $(X_3 X_4) = \theta$. Ceci peut s'écrire

$$\begin{aligned} k &= \frac{Saa_3a_4}{\sin\theta} = \frac{SVx_3x_4Va_3a_4}{\sin^2\theta} = \frac{Sa_3x_3Sa_4x_4 - Sa_3x_4Sa_4x_3}{\sin^2\theta} & (21)\\ &= \frac{H_3H_4 - (B_{34})^2}{\sin^2\theta} \ . \end{aligned}$$

Cette dernière forme est semblable à celle de Gauss dans la notation paramétrique u, v. Dans le cas particulier, où $\theta = \frac{\pi}{2}$, elle devient

$$k = H_3H_4 - T_3^2 \ . \tag{21'}$$

b) Considérons maintenant les mêmes quatre courbes (*a*). Nous aurons

$$\begin{aligned}\sin\varphi\,(\mathrm{S}aa_3x_4 - \mathrm{S}aa_4x_3) &= \mathrm{SV}x_1x_2\mathrm{V}a_3x_4 - \mathrm{SV}x_1x_2\mathrm{V}a_4x_3 \qquad (22)\\ &= \mathrm{S}a_3x_1\mathrm{S}x_2x_4 - \mathrm{S}a_3x_2\mathrm{S}x_1x_4 - \mathrm{S}a_4x_1\mathrm{S}x_2x_3 + \mathrm{S}a_4x_2\mathrm{S}x_1x_3\\ &= \mathrm{S}a_1x_3\mathrm{S}x_2x_4 - \mathrm{S}a_2x_3\mathrm{S}x_1x_4 - \mathrm{S}a_1x_4\mathrm{S}x_2x_3 + \mathrm{S}a_2x_4\mathrm{S}x_1x_3 \quad \text{d'après I}\\ &= \mathrm{SV}x_3x_4\mathrm{V}a_1x_2 - \mathrm{SV}x_3x_4\mathrm{V}a_2x_1\ ,\\ &= \sin\theta\,(\mathrm{S}aa_1x_2 - \mathrm{S}aa_2x_1)\ ,\end{aligned}$$

$$\sin\varphi\ \mathrm{A}_{34} = \sin\theta\ \mathrm{A}_{12}\ . \qquad (23)$$

Ce résultat montre que A_{rk} est un invariant absolu pour deux courbes quelconques passant par P et se coupant sous un angle constant.

Lorsque $\varphi = \frac{\pi}{2}$, cette relation devient

$$\mathrm{A}_{34} = \sin\theta\,(\mathrm{S}aa_1x_2 - \mathrm{S}aa_2x_1)$$

et si, de plus, les courbes S_1 et S_2 sont des lignes de courbure, nous aurons d'après (12″)

$$\mathrm{A}_{34} = 2h\sin\theta\ . \qquad (24)$$

5. *Grandeurs géométriques relatives à deux courbes.* — Soient deux courbes sur la surface, se coupant en un point P et formant un angle θ. Les deux identités (12) et (24) fournissent la relation

$$2h\sin\theta = (\mathrm{H}_r + \mathrm{H}_k)\sin\theta + (\mathrm{T}_r - \mathrm{T}_k)\cos\theta\ . \qquad (25)$$

Nous pouvons écrire (9) sous la forme

$$0 = (\mathrm{H}_r - \mathrm{H}_k)\cos\theta - (\mathrm{T}_r + \mathrm{T}_k)\sin\theta\ . \qquad (9)$$

En éliminant T_k entre ces deux relations, nous trouvons [1]

$$\mathrm{H}_k = \mathrm{H}_r\cos 2\theta - \mathrm{T}_r\sin 2\theta + 2h\sin^2\theta \qquad (26)$$

et en éliminant H_k, on obtient

$$\mathrm{T}_k = \mathrm{H}_r\sin 2\theta + \mathrm{T}_r\cos 2\theta - h\sin 2\theta\ . \qquad (27)$$

[1] Voir Forsyth, *Differential Geometry*, p. 231. Le lecteur notera la différence entre la méthode employée et celle qui est exposée ici.

D'autres relations entre les deux courbes peuvent être trouvées en utilisant (17) avec (25) (9) (26) (27).

6. *Dérivées du second ordre.* — Si l'on prend les dérivées successives, on peut se servir des abréviations suivantes

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s_1 \partial s_2} = x_{12} = \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial x}{\partial s_1}\right), \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial s_2 \partial s_1} = x_{21}, \qquad \frac{\partial_2 x}{\partial s_1 \partial s_1} = x_{11}.$$

En général x_{12} n'est pas égal à x_{21}. Les vecteurs dérivés par dérivations successives sont très importants; mais lorsque les courbes $S_1 S_2$ ne sont pas rectangulaires, l'évaluation de ces vecteurs au moyen des vecteurs x_1 x_2, etc. est plutôt compliquée. Pour cette raison, dans cette discussion, les courbes $S_1 S_2$ seront considérées comme rectangulaires dans ce qui suit.

Il est nécessaire maintenant d'introduire une nouvelle constante relative au point; à savoir

$$J_r = Sax_r x_{rr}. \tag{28}$$

Cette constante est l'expression bien connue de la courbure géodésique de la courbe S_r.

Il est bon de noter la facon suivante d'exprimer H_1 T_1 etc., au moyen des dérivées du second ordre

$$\left\{\begin{array}{lll} H_1 = Sa_1 x_1 = - Sax_{11} & \text{puisque} & Sax_1 = 0 \\ H_2 = Sa_2 x_2 = - Sax_{22} & \text{»} & Sax_2 = 0 \\ T_1 = Saa_1 x_1 = Sx_2 a_1 = - Sax_{21} & \text{puisque} & x_2 = Vx_2 a \\ T_2 = Saa_2 x_2 = - Sx_1 a_2 = Sax_{12}. & & \end{array}\right. \tag{29}$$

Aussi quand l'angle $(x_1 x_2) = \frac{\pi}{2}$ nous pouvons écrire

$$\left\{\begin{array}{l} x_2 = Vax_1, \qquad x_1 = - Vax_2 \\ 0 = (Sx_1 x_2)_1 = Sx_2 x_{11} + Sx_1 x_{21} \quad \text{et} \quad 0 = (Sx_1 x_2)_2 = Sx_1 Sx_{22} + Sx_2 x_{12} \end{array}\right. \tag{30}$$

et par suite

$$\left\{\begin{array}{l} J_1 = Sax_1 x_{11} = Sx_2 x_{11} = - Sx_1 x_{21}, \\ J_2 = Sax_2 x_{22} = - Sx_1 x_{22} = Sx_2 x_{12}. \end{array}\right. \tag{31}$$

Comme $Sx_2 a_1 = Sx_1 a_2$, il ne sera donc pas nécessaire d'avoir les deux constantes T_1 et T_2 pour des courbes rectangulaires, mais à la place nous utiliserons

$$T = - T_1 = T_2, \tag{32}$$

Les évaluations suivantes sont utiles

$$\begin{aligned} x_{11} &= x_{11} \mathrm{S} a x_1 x_2 \,, \quad \text{puisque} \quad \mathrm{S} a x_1 x_2 = 1 \,, \\ &= a \mathrm{S} x_1 x_2 x_{11} + x_1 \mathrm{S} a x_{11} x_2 + x_2 \mathrm{S} a x_1 x_{11} \,, \\ &= a \mathrm{S} a x_{11} + x_2 \mathrm{S} a x_1 x_{11} \,, \\ &= - \mathrm{H}_1 a + \mathrm{J}_1 x_2 \,. \end{aligned} \tag{33}$$

De même

$$\begin{aligned} x_{22} &= - \mathrm{H}_2 a - \mathrm{J}_2 x_1 \,, \\ x_{12} &= \mathrm{T} a + \mathrm{J}_2 x_2 \,, \\ x_{21} &= \mathrm{T} a - \mathrm{J}_1 x_1 \,. \end{aligned}$$

Des deux dernières relations, nous tirons

$$x_{12} - x_{21} = x_1 \mathrm{J}_1 + x_2 \mathrm{J}_2 \,. \tag{34}$$

Cette identité montre que l'ordre de différentiation n'est pas interchangeable, comme c'est le cas dans la différentiation ordinaire avec variables scalaires. Ce résultat peut être facilement généralisé sous la forme

$$\frac{\partial^2 m}{\partial s_1 \partial s_2} - \frac{\partial^2 m}{\partial s_2 \partial s_1} = \mathrm{J}_1 m_1 + \mathrm{J}_2 m_2 \,, \tag{35}$$

où m est une fonction scalaire ou vectorielle des variables u et v [1].

Lorsque S_1 et S_2 sont deux lignes géodésiques à angle droit, les identités (33) donnent

$$x_{21} = \mathrm{T} a \quad \text{et} \quad x_{22} = - \mathrm{H}_2 a \,.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \mathrm{S} x_1 [x_{212} - x_{221}] &= \mathrm{S} x_1 \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial s_2} a + \mathrm{T} \frac{\partial a}{\partial s_2} + \frac{\partial \mathrm{H}_2}{\partial s_1} a + \mathrm{H}_2 \frac{\partial a}{\partial s_1} \right) \\ &= \mathrm{H}_2 \mathrm{S} x_1 a_1 + \mathrm{T} \mathrm{S} a_2 x_1 \\ &= \mathrm{H}_2 \mathrm{H}_1 - \mathrm{T}^2 \,, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathrm{S} x_2 [x_{121} - x_{112}] &= \mathrm{S} x_2 \left(a \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial s_1} + \mathrm{T} \frac{\partial a}{\partial s_1} + a \frac{\partial \mathrm{H}_1}{\partial s_2} + \mathrm{H}_1 \frac{\partial a}{\partial s_2} \right) \\ &= \mathrm{H}_1 \mathrm{S} a_2 x_2 + \mathrm{T} \mathrm{S} a_1 x_2 \\ &= \mathrm{H}_1 \mathrm{H}_2 - \mathrm{T}^2 \,. \end{aligned}$$

---

[1] Voir *Geometria Intrinseca*, par Cesàro, p. 112.

Ces résultats fournissent un cas particulier du symbole à quatre indices de Riemann-Christoffel dans un espace à trois dimensions.

Les relations de Codazzi pour $H_1 H_2$ et T se forment facilement en se servant de cette notation. Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_1}{\partial s_2}+\frac{\partial T}{\partial s_1} &= Sa_{12}x_1+Sa_1x_{12}-Sa_{21}x_1-Sa_2x_{11}\,, \qquad (36)\\ &= Sx_1(a_{12}-a_{21})+Sa_1x_{12}-Sa_2x_{11}\,,\\ &= Sx_1(J_1a_1+J_2a_2)-TJ_2-J_1H_2\,,\\ &= H_1J_1-2TJ_2-J_1H_2\,,\\ &= -2TJ_2+J_1(H_1-H_2)\,.\end{aligned}$$

De même

$$\frac{\partial H_2}{\partial s_1}+\frac{\partial T}{\partial s_2}=2TJ_1+J_2(H_1-H_2)\,. \qquad (37)$$

A ces relations, Cesàro a ajouté

$$\begin{aligned}\frac{\partial J_1}{\partial s_2}-\frac{\partial J_2}{\partial s_1} &= \frac{\partial}{\partial s_2}Sx_2x_{11}+\frac{\partial}{\partial s_1}Sx_1x_{22}=\frac{\partial}{\partial s_2}Sx_2x_{11}-\frac{\partial}{\partial s_1}Sx_2x_{12} \quad \text{d'après (31)} \qquad (38)\\ &= Sx_{22}x_{11}+Sx_2x_{112}-Sx_{21}x_{12}-Sx_2x_{121}\,,\\ &= Sx_2(x_{112}-x_{121})+S(-H_2a-J_2x_1)(-H_1a+J_1x_2)\,,\\ &\qquad -S(Ta+J_2x_2)(Ta-J_1x_1)\,,\\ &= Sx_2(J_1x_{11}+J_2x_{12})+H_2H_1-T^2\,,\\ &= J_1^2+J_2^2+H_1H_2-T^2\,.\end{aligned}$$

7. *Exemples.* — Nous ajouterons quelques exemples pour montrer la facilité avec laquelle des théorèmes bien connus peuvent être établis par le moyen de cette notation.

a) Supposons l'angle $(X_1X_2)=\frac{\pi}{2}$ et l'angle $(X_1X_r)=\theta$, nous aurons

$$\begin{aligned} x_r &= x_rSax_1x_2=x_1Sax_rx_2+x_2Sax_1x_r\,,\\ &= x_1\cos\theta+x_2\sin\theta\,.\\ H_r &= Sa_rx_r=Sa_r(x_1\cos\theta+x_2\sin\theta)\,,\\ &= Sx_r(a_1\cos\theta+a_2\sin\theta)\,, \quad \text{d'après I}\,.\end{aligned}$$

Ceci montre que lorsque $(X_1 X_2)$ sont à angle droit

$$\begin{aligned} a_r &= a_1 \cos\theta + a_2 \sin\theta \,, \\ Sa_1 x_r &= Sa_1 x_r . Sa x_1 x_2 \,, \qquad (b) \\ &= Sa_1 x_1 Sa x_r x_2 + Sa_1 x_2 Sa x_1 x_r \,, \\ &= H_1 \cos\theta - T_1 \sin\theta \,. \end{aligned}$$

De même

$$Sa_2 x_r = H_2 \sin\theta - T_1 \cos\theta \,.$$

Multipliant la première de ces relations par *cos* θ, la seconde par *sin* θ et additionnant, nous trouvons

$$H_r = Sx_r(a_1 \cos\theta + a_2 \sin\theta) = H_1 \cos^2\theta - T_1 \sin 2\theta + H_2 \sin^2\theta$$

et, lorsque S_1 et S_2 sont des lignes de courbure passant par le point,

$$H_r = \frac{\cos^2\theta}{R_1} + \frac{\sin^2\theta}{R_2} \,.$$

$$\begin{aligned} T_r &= Saa_r x_r = SVx_1 x_2 Va_r x_r \,, \qquad (c) \\ &= SVx_1 x_2 V(a_1 \cos\theta + a_2 \sin\theta)(x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta) \,, \\ &= (H_1 \cos\theta - T \sin\theta) \sin\theta - (-T \cos\theta + H_2 \sin\theta) \cos\theta \,, \\ &= \frac{1}{2}(H_1 + H_2) \sin 2\theta + T \cos 2\theta \end{aligned}$$

et, quand S_1 et S_2 sont des lignes de courbure,

$$T_r = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \sin 2\theta \,.$$

8. *Courbure totale.* — Soit x_1 le vecteur-unité pris le long de la tangente à une courbe tracée sur la surface et soit a le vecteur-unité normal à la surface. Le vecteur λ perpendiculaire aux deux précédents est défini par

$$\lambda = Vx_1 a \,.$$

La dérivée de λ par rapport à s_1 donne

$$\lambda_1 = Vx_{11} a + Vx_1 a_1 \,.$$

La quantité scalaire $g = \sqrt{S\lambda_1\lambda_1}$ est appelée la courbure totale au point. En utilisant nos constantes au point, nous avons

$$Va_1x_1 = aT_1 \qquad \text{et} \qquad Vax_{11} = -x_1J_1 ,$$

par suite

$$\lambda_1 = -aT_1 + x_1J_1 ,$$

$$\begin{aligned} g^2 &= S\lambda_1\lambda_1 = S(-aT_1 + x_1J_1)(-aT_1 + x_1J_1) , \\ &= T_1^2 + J_1^2 . \end{aligned}$$

De même, en dérivant a, nous trouvons

$$a_1 = \frac{da}{ds_1} = \frac{da}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds_1} = \alpha\frac{d\sigma}{ds_1} ,$$

où $d\sigma$ représente un élément d'arc dans la représentation sphérique des vecteurs a obtenue en traçant tous les vecteurs égaux à a à partir d'un point commun O. Le vecteur α est un vecteur-unité le long de la tangente à la représentation sphérique. Alors

$$T_1 = Saa_1x_1 = \frac{d\sigma}{ds_1}Sa\alpha x_1 = \frac{d\sigma}{ds_1}S\alpha Vxa = \frac{d\sigma}{ds_1}S\alpha\lambda$$

$$T_1 = \frac{d\sigma}{ds_1}\sin\theta ,$$

où θ est l'angle $(X_1\alpha)$.

Les théorèmes et méthodes développés dans cette étude indiquent suffisamment la façon suivant laquelle un exposé complet de la géométrie intrinsèque pourrait être fait. Ce qui a été dit suffit, nous l'espérons, pour illustrer la valeur des théorèmes et des méthodes.

Genève, juin 1925.