

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	24 (1924-1925)
Heft:	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
Artikel:	MÉTHODE D'HAMILTON POUR RÉSOUTRE UNE ÉQUATION VECTORIELLE DU PREMIER DEGRÉ
Autor:	Niewenglowski, B.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-515763

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 22.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

MÉTHODE D'HAMILTON
POUR RÉSOUDRE UNE ÉQUATION VECTORIELLE
DU PREMIER DEGRÉ

PAR

B. NIEWENGLOWSKI (Paris).

Dans son beau *Traité élémentaire des quaternions*, M. P.-G. TAIT, voulant exposer la méthode suivie par HAMILTON pour résoudre une équation vectorielle du premier degré, s'exprime ainsi: « Nous arrivons maintenant à l'admirable investigation d'Hamilton ».

J'espère avoir rendu un peu plus facile l'exposé de Tait; un lecteur, même peu familiarisé avec l'emploi des quaternions, pourra ainsi apprécier la belle solution donnée par Hamilton.

1. Rappelons quelques formules. Etant donnés deux quaternions q, r ; les scalaires des produits qr et rq sont égaux, c'est-à-dire

$$Sqr = Srq .$$

2. Soient α, β, γ trois vecteurs non coplanaires et α', β', γ' trois autres vecteurs. Chacun de ces derniers s'exprime linéairement au moyen des trois premiers, de telle sorte que

$$\begin{aligned} \alpha' &= a \cdot \alpha + b \cdot \beta + c \cdot \gamma \\ \beta' &= a' \cdot \alpha + b' \cdot \beta + c' \cdot \gamma \\ \gamma' &= a'' \cdot \alpha + b'' \cdot \beta + c'' \cdot \gamma; \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (1)$$

nous poserons

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \Delta$$

et nous supposerons $\Delta \neq 0$.

Il s'agit de prouver que

$$S \cdot \alpha' \beta' \gamma' = S \cdot \alpha \beta \gamma \cdot \Delta . \quad (2)$$

Pour établir cette identité, il suffit d'exprimer les six vecteurs considérés au moyen des vecteurs unités fondamentaux i, j, k , en posant

$$\begin{aligned} \alpha &= ix + jy + kz \\ \beta &= ix' + jy' + kz' \\ \gamma &= ix'' + jy'' + kz'' \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha' &= iX + jY + kZ \\ \beta' &= iX' + jY' + kZ' \\ \gamma' &= iX'' + jY'' + kZ'' \end{aligned}$$

en substituant dans (1) on trouve

$$\begin{aligned} X &= ax + bx' + cx'' \\ Y &= ay + by' + cy'' \\ Z &= az + bz' + cz'' \\ X' &= a'x + b'x' + c'x'' , \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} S \alpha \beta \gamma &= - \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} \\ S \alpha' \beta' \gamma' &= - \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix} \end{aligned}$$

et le second déterminant est égal au premier multiplié par Δ . L'identité (2) se trouve ainsi vérifiée.

3. Soient q, r , deux quaternions et ρ, σ deux vecteurs; on a:

$$S \sigma V q \rho r = S \rho V r \sigma q . \quad (3)$$

En effet,

$$V q \rho r = q \rho r - S \cdot q \rho r ,$$

donc

$$S \sigma V q \rho r = S \sigma q \rho r - S \sigma S q \rho r ,$$

mais $\sigma S q \rho r$ est un vecteur, donc le dernier terme de l'égalité précédente est nul et l'on a simplement:

$$S \sigma V q \rho r = S \sigma q \rho r = S \rho r \sigma q = S \rho V r \sigma q .$$

4. Considérons maintenant un nombre quelconque de couples de quaternions $q_1, r_1; q_2, r_2; \dots$ et posons

$$\varphi(\rho) = \Sigma Vq\rho r = Vq_1\rho_1 r_1 + Vq_2\rho_2 r_2 + \dots \quad (4)$$

$\varphi(\rho)$ est évidemment un vecteur. La formule (3) s'applique à chacun des termes de la somme précédente, d'où il suit que

$$S\sigma \Sigma Vq\rho r = S\rho \Sigma Vr\sigma q .$$

Si l'on pose

$$\varphi'(\sigma) = \Sigma Vr\sigma q .$$

on a

$$S\sigma\varphi(\rho) = S\rho\varphi'(\sigma) . \quad (5)$$

On dit que les fonctions φ et φ' sont conjuguées.

5. Si l'on pose

$$\varphi_1 = \varphi + h ,$$

h désignant un scalaire quelconque, il faut entendre par là que, par exemple

$$\varphi_1(\rho) = \varphi(\rho) + h\rho ;$$

on en déduit

$$\begin{aligned} S\sigma\varphi_1(\rho) &= S[\sigma \Sigma Vq\rho r + h\sigma\rho] . \\ &= S[\sigma \Sigma Vr\sigma q + h\rho\sigma] . \end{aligned}$$

car

$$S\sigma\rho = S\rho\sigma ;$$

en d'autres termes:

$$S\sigma\varphi_1(\rho) = S \cdot \rho \{ \Sigma Vr\sigma q + h\sigma \} .$$

Si l'on pose

$$\varphi'_1 = \varphi_1 + h ,$$

ce qui donne

$$\varphi'_1(\sigma) = \varphi_1(\sigma) + h\sigma ,$$

on peut écrire:

$$S\sigma\varphi_1(\rho) = S\rho\varphi'_1(\sigma) .$$

Problème. — Déterminer le vecteur inconnu ρ tel que

$$\Sigma Vq\rho r = \gamma , \quad (6)$$

ou (4)

$$\varphi(\rho) = \gamma ,$$

γ étant un vecteur donné.

Le problème posé est possible en général. En se donnant les expressions des quaternions $q, q_1 \dots$ et du vecteur γ et posant $\rho = ix + jy + kz$, on obtiendra une équation du premier degré en x, y, z qui se décomposera en un système de trois équations en x, y, z que l'on pourra résoudre par les formules de Cramer, Hamilton a donné une solution très élégante, que nous allons développer.

Remarquons en premier lieu, qu'étant donné un vecteur γ on peut, et cela d'une infinité de manières, déterminer deux vecteurs λ, μ perpendiculaires à γ et tels que

$$V\lambda\mu = \gamma.$$

En effet, considérons un trièdre trirectangle OXYZ; supposons que l'axe OZ porte le vecteur γ ; prenons un vecteur λ dirigé suivant OX et un vecteur μ dans le plan XOY. Soient I, J, K, les vecteurs-unités dirigés suivant OX, OY, OZ respectivement. Si le trièdre est orienté convenablement, on aura

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1 \quad IJ = K \dots \text{ etc.}$$

Alors, soient

$$\lambda = xI, \quad \mu = x'I + y'J, \quad \gamma = z''K,$$

il en résulte

$$V\lambda\mu = x\gamma'K,$$

il suffit donc de poser $xy' = z''$ pour que $V\lambda\mu = \gamma$.

Cela étant, on pose

$$\varphi(\rho) = V\lambda\mu,$$

d'où

$$S\lambda\varphi(\rho) = S\lambda V\lambda\mu = S\lambda(\lambda\mu - S\lambda\mu)$$

or

$$\lambda(\lambda\mu - S\lambda\mu) = \lambda^2\mu - \lambda S\lambda\mu,$$

Or $\lambda^2\mu$ et $\lambda S\lambda\mu$ sont des vecteurs.

On a donc

$$S\lambda\varphi(\rho) = 0,$$

et de même

$$S\mu\varphi(\rho) = 0.$$

Mais

$$S\lambda\varphi(\rho) = S\rho\varphi'(\lambda), \quad S\mu\varphi(\rho) = S\rho\varphi'(\mu),$$

donc

$$S\rho\varphi'(\lambda) = 0, \quad S\rho\varphi'(\mu) = 0,$$

ce qui prouve que le vecteur ρ est perpendiculaire aux deux vecteurs $\varphi'(\lambda)$, $\varphi'(\mu)$ et par suite

$$m\rho = V\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu) \quad (7)$$

m désignant un scalaire.

Si l'on sait résoudre l'équation (6), on en tirera $\rho = \psi(\gamma)$. On peut donc définir ψ comme étant la fonction inverse de φ et poser $\psi = \varphi^{-1}$, ce qui permet d'écrire l'équation (7) de cette façon:

$$m\varphi^{-1}(\gamma) = V\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu),$$

ou encore

$$m\varphi^{-1}(V\lambda\mu) = V\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu). \quad (7')$$

7. *Calcul du scalaire m .* — De (7) on tire

$$m\varphi'(\nu)\rho = \varphi'(\nu)V\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu)$$

en désignant par ν un vecteur non coplanaire avec λ et μ .

Le second membre peut s'écrire ainsi:

$$\varphi'(\nu)\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu) - \varphi'(\nu)S\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu)$$

Ce second terme est un vecteur, donc en égalant les scalaires des deux membres de l'équation précédente, on a:

$$mS\varphi'(\nu)\rho = S\varphi'(\nu)\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu) = S\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu)\varphi'(\nu)$$

D'autre part,

$$S\varphi'(\nu)\rho = S\rho\varphi'(\nu) = S\nu\varphi(\rho) = S\nu V\lambda\mu,$$

donc,

$$S\varphi'(\nu)\rho = S\lambda\mu\nu,$$

ce qui donne

$$m = \frac{S\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu)\varphi'(\nu)}{S\lambda\mu\nu}.$$

Il s'agit de prouver que m est un invariant. Remplaçons le trièdre λ, μ, ν par un autre λ', μ', ν' de façon que

$$\begin{aligned}\lambda' &= a\lambda + b\mu + c\nu \\ \mu' &= a'\lambda + b'\mu + c'\nu \\ \nu' &= a''\lambda + b''\mu + c''\nu\end{aligned}$$

en posant

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \Delta$$

on a (2)

$$S\lambda'\mu'\nu' = S\lambda\mu\nu x \Delta .$$

d'autre part:

$$\varphi'(\lambda') = \Sigma Vr(a\lambda + b\mu + c\nu) , = a\Sigma Vr\lambda q + b\Sigma Vr\mu q + c\Sigma Vr\nu q ,$$

c'est-à-dire

$$\varphi'(\lambda') = a\varphi'(\lambda) + b\varphi'(\mu) + c\varphi'(\nu) ,$$

et de même:

$$\varphi'(\mu') = a'\varphi'(\lambda) + b'\varphi'(\mu) + c'\varphi'(\nu) ,$$

$$\varphi'(\nu') = a''\varphi'(\lambda) + b''\varphi'(\mu) + c''\varphi'(\nu) ,$$

et ces formules restent vraies si l'on remplace φ par φ_1 . On a donc aussi

$$S\varphi'(\lambda')\varphi'(\mu')\varphi'(\nu') = S\varphi'(\lambda)\varphi'(\mu)\varphi'(\nu) \times \Delta ,$$

donc m ne change pas

On peut profiter de cette remarque pour avoir un calcul plus simple: à cet effet, on peut remplacer λ, μ, ν par i, j, k et l'on en déduit

$$m = -S\varphi'(i)\varphi'(j)\varphi'(k)$$

et en remplaçant m par cette expression dans (7) on a la solution du problème proposé.

8. Hamilton a obtenu une formule débarrassée des vecteurs λ, μ, ν .

Remplaçons φ par $\varphi + h$. Comme nous l'avons expliqué au N° 5, ce qui signifie que nous remplaçons $\varphi(\rho)$ par $\varphi_1(\rho)$ ou $\varphi(\rho) + h\rho$. Supposons encore $\varphi_1(\rho) = \gamma = V\lambda\mu$, λ et μ n'étant pas nécessairement les mêmes que plus haut. En procédant comme au n° précédent, nous obtiendrons :

$$m_h \rho = V\varphi'_1(\lambda)\varphi'_1(\mu)$$

m_h désignant ce qu'est devenu le scalaire m après ce changement. On aura d'ailleurs

$$m_h = \frac{S \varphi'_1(\lambda) \varphi'_1(\mu) \varphi'_1(\nu)}{S \lambda \mu \nu}$$

et, quel que soit h , m_h reste invariable quand on remplace λ, μ, ν par λ', μ', ν' comme plus haut,

On a donc

$$m_h = \frac{S(\varphi'(\lambda) + h\lambda)(\varphi'(\mu) + h\mu)(\varphi'(\nu) + h\nu)}{S \lambda \mu \nu},$$

c'est-à-dire

$$m_h = m + m_1 h + m_2 h^2 + h^3,$$

où m, m_1, m_2 sont des invariants, puisque m_h est invariant, quel que soit h .

D'ailleurs

$$m_1 = \frac{S(\varphi'(\lambda) \varphi'(\mu) \nu + \varphi'(\lambda) \mu \varphi'(\nu) + \lambda \varphi'(\mu) \nu)}{S \lambda \mu \nu}$$

$$m_2 = \frac{S(\lambda \mu \varphi'(\nu) + \varphi'(\lambda) \mu \nu + \lambda \varphi'(\mu) \nu)}{S \lambda \mu \nu}$$

et dans ces formules, on pourrait remplacer λ, μ, ν , par i, j, k .

Cela étant, la formule

$$m_h \rho = V \varphi'_1(\lambda) \varphi'_1(\mu)$$

développée, donne

$$m_h \rho = V(\varphi'(\lambda) + h\lambda)(\varphi'(\mu) + h\mu),$$

c'est-à-dire :

$$m_h \rho = V[\varphi'(\lambda) \varphi'(\mu) + h(\varphi'(\lambda) \mu + \lambda \varphi'(\mu)) + h^2 \lambda \mu]$$

mais

$$V \varphi'(\lambda) \varphi'(\mu) = m \rho = m \varphi^{-1}(\gamma),$$

$$V \lambda \mu = \gamma.$$

Posons

$$V[\varphi'(\lambda) \mu + \lambda \varphi'(\mu)] = X.$$

ce qui nous permet d'écrire

$$m_h \rho = m \varphi^{-1}(\gamma) + hX + h^2 \gamma.$$

Multiplions les deux membres, à gauche, par φ_1 ou $\varphi + h$, ce qui nous donne dans le premier membre:

$$m_h \varphi_1(\varphi) \quad \text{ou} \quad m_h \gamma \ ,$$

c'est-à-dire:

$$(m + m_1 h + m_2 h^2 + h^3) \gamma \ .$$

Calculons ce que devient le second membre.

Le premier terme devient:

$$m(\varphi + h)\varphi^{-1}(\gamma) \ ,$$

ce qui signifie

$$m\varphi(\varphi^{-1}(\gamma)) + mh\varphi^{-1}(\gamma) \ ,$$

ou, plus simplement:

$$m\gamma + mh\varphi^{-1}(\gamma) \ .$$

Le second terme donne:

$$h(\varphi + h)X \quad \text{ou} \quad h\varphi(X) + h^2X \ ,$$

enfin, le troisième terme devient:

$$(\varphi + h)h^2\gamma = h^2\varphi(\gamma) + h^3\gamma \ .$$

On a ainsi:

$$(m + m_1 h + m_2 h^2 + h^3)\gamma \equiv (m + h^3)\gamma + h(m\varphi^{-1}(\gamma) + \varphi(X)) + h^2[X + \varphi(\gamma)] \ .$$

Si l'on égale les coefficients de h^2 , on trouve

$$m_2\gamma = X + \varphi(\gamma) \ .$$

Donc, X est une fonction linéaire de γ et l'on peut poser

$$X = \psi(\gamma) = m_2\gamma - \varphi(\gamma)$$

ou, symboliquement:

$$\psi(\gamma) = (m_2 - \varphi)\gamma \ ,$$

ou encore $\psi = m_2 - \varphi$.

Egalons maintenant les coefficients de h ; nous aurons

$$m_1 = m\varphi^{-1} + \varphi(\psi) \ .$$

ou

$$m_1 = m\varphi^{-1} + \varphi(m_2 - \varphi) \ ,$$

Ce qui donne enfin:

$$m\varphi^{-1} = m_1 - m_2\varphi + \varphi^2,$$

ou, sous forme plus explicite:

$$m\bar{\varphi}'(\gamma) = m_1\gamma - m_2\varphi(\gamma) + \varphi(\varphi(\gamma)). \quad (8)$$

Telle est la formule d'Hamilton.

APPLICATION ET VÉRIFICATION.

Exemple. — Déterminer ρ par la condition

$$V\alpha\rho\beta = \gamma$$

α, β, γ étant des vecteurs.

Dans ce cas:

$$\varphi(\rho) = V\alpha\rho\beta = \alpha S\beta\rho - \rho S\alpha\beta + \beta S\alpha\rho = V\beta\rho\alpha$$

donc

$$\varphi'(\rho) = \varphi(\rho).$$

Par suite:

$$\varphi'(\lambda) = V\alpha\lambda\beta, \quad \varphi'(\mu) = V\alpha\mu\beta, \quad \varphi'(\gamma) = V\alpha\gamma\beta.$$

Pour calculer m nous remplacerons λ, μ, ν par α, β, γ respectivement.

Alors:

$$V\alpha\lambda\beta \text{ devient } V\alpha^2\beta = \alpha^2\beta$$

$$V\alpha\mu\beta \text{ devient } V\alpha\beta^2 = \alpha\beta^2$$

$$V\alpha\nu\beta \text{ devient } V\alpha\gamma\beta.$$

Le numérateur de m devient donc:

$$S\alpha^2\beta \cdot \alpha\beta^2 V\alpha\gamma\beta,$$

c'est-à-dire

$$\alpha^2\beta^2 S\beta\alpha V\alpha\gamma\beta.$$

Or,

$$\beta\alpha V\alpha\gamma\beta = \beta\alpha(\alpha S\gamma\beta - \gamma S\alpha\beta + \beta S\alpha\gamma),$$

$\alpha^2\beta S\gamma\beta$ et $\beta^2\alpha S\alpha\gamma$ sont des vecteurs. Il reste

$$-\alpha^2\beta^2 S\beta\alpha\gamma S\alpha\beta$$

ou

$$\alpha^2\beta^2 S\alpha\beta S\alpha\beta\gamma;$$

le dénominateur devenant $S\alpha\beta\gamma$, on a finalement

$$m = \alpha^2\beta^2S\alpha\beta$$

et, par suite

$$\rho \cdot \alpha^2\beta^2S\alpha\beta = V\varphi(\lambda)\varphi(\mu) .$$

Pour appliquer la dernière formule d'Hamilton, calculons m_1 et m_2 .

En remplaçant λ, μ, ν par α, β, γ on a:

$$m_1 = \frac{S[\alpha\varphi(\beta)\varphi(\gamma) + \varphi(\alpha)\beta\varphi(\gamma) + \varphi(\alpha)\varphi(\beta)\gamma]}{S\alpha\beta\gamma} .$$

Nous savons déjà que

$$\rho(\alpha) = \alpha^2\beta, \quad \varphi(\beta) = \alpha\beta^2, \quad \varphi(\gamma) = V\alpha\gamma\beta$$

en faisant les substitutions, le numérateur devient

$$S[2\alpha^2\beta^2V\alpha\gamma\beta + \alpha\beta^2\gamma] = S\alpha^2\beta^2\beta\alpha\gamma = -\alpha^2\beta^2S\alpha\beta\gamma$$

donc $m_1 = -\alpha^2\beta^2$,

Ensuite,

$$m_2 = \frac{S[\alpha\beta\varphi(\gamma) + \varphi(\alpha)\beta\gamma + \alpha\rho(\beta)\gamma]}{S\alpha\beta\gamma} .$$

Le numérateur se réduit à $S\alpha\beta V\alpha\gamma\beta$ et, en remplaçant $V\alpha\gamma\beta$ par $\alpha S\gamma\beta - \gamma S\alpha\beta + \beta S\gamma$ on obtient simplement

$$-S\alpha\beta S\alpha\beta\gamma ,$$

d'où

$$m_2 = -S\alpha\beta .$$

La formule (8) donne

$$\rho \cdot \alpha^2\beta^2S\alpha\beta = -\alpha^2\beta^2\gamma + S\alpha\beta \cdot V\alpha\gamma\beta + V(\alpha \cdot V\alpha\gamma\beta \cdot \beta) .$$

Mais,

$$\alpha V\alpha\gamma\beta \cdot \beta = \alpha^2\beta S\beta\gamma - \alpha\gamma\beta S\alpha\beta + \alpha\beta^2 S\alpha\gamma$$

et par suite

$$V(\alpha V\alpha\gamma\beta \cdot \beta) = \alpha^2\beta S\beta\gamma - V\alpha\gamma\beta S\alpha\beta + \alpha\beta^2 S\alpha\gamma ,$$

ce qui permet d'écrire

$$\rho \cdot \alpha^2\beta^2S\alpha\beta = -\alpha^2\beta^2\gamma + \alpha^2\beta S\beta\gamma + \alpha\beta^2 S\alpha\gamma$$

et enfin, en divisant les deux membres par $\alpha^2\beta^2$:

$$\rho S\alpha\beta = -\gamma + \alpha^{-1}S\alpha\gamma + \beta^{-1}S\beta\gamma .$$

Cette équation peut être obtenue directement. En effet, de l'équation donnée:

$$V\alpha\rho\beta = \gamma,$$

on tire

$$S\alpha V\alpha\rho\beta = S\alpha\gamma,$$

ou

$$S.\alpha(\alpha\rho\beta - S\alpha\rho\beta) = S\alpha\gamma$$

$\alpha S\alpha\rho\beta$ étant un vecteur, on a simplement

$$\alpha^2 S\rho\beta = S\alpha\gamma,$$

ou

$$\alpha S\rho\beta = \alpha^{-1} S\alpha\gamma,$$

de même

$$\beta S\rho\alpha = \beta^{-1} S\beta\gamma,$$

ce qui donne

$$\gamma = V\alpha\rho\beta = \alpha^{-1} S\alpha\gamma + \beta^{-1} S\beta\gamma - \rho S\alpha\beta$$

et l'on retrouve bien l'équation obtenue en appliquant la formule d'Hamilton.

TROUVER UNE COURBE DONT LA COURBURE
ET LA TORSION RELATIVES A CHAQUE POINT
AIENT UN RAPPORT CONSTANT

PAR

B. NIEWENGLOWSKI (Paris).

Soit $\rho = f(s)$ l'équation de la courbe cherchée, s désignant l'arc. Nous représenterons la courbure et la torsion en un point M par les lettres c et c_1 . On trouve aisément

$$S\rho'\rho'' = 0, \quad T\rho' = 1, \quad T\rho'' = c,$$

et

$$\rho'\rho'' = c\alpha, \quad (1)$$