Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 24 (1924-1925)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOMMES DES PUISSANCES SEMBLABLES DES p—1 PREMIERS NOMBRES ENTIERS, p ÉTANT UN NOMBRE PREMIER

Autor: Lévy, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515762

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 07.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Dans l'exemple cité où p et q ont les valeurs (12), on peut prendre $h = 5$ et l'on aura

$$S = \frac{(2 \,.\, 10^5 + 1)^{10}}{10^{50} - 10^{45}} =$$

$$= 0{,}06144\,17664\,33024\,46464\,54528\,57888\,58848\,59028\,59048\,59049 \;.$$

La probabilité pour que, sur dix épreuves, l'événement A arrive au moins $10-k$ fois (et B au plus k fois) s'obtient en divisant par 59049 le groupe de décimales de S commençant par la $(hk+1)^{\text{ième}}$ et terminée par la $(k+1)h^{\text{ième}}$ décimale. Ainsi, pour que A arrive au moins six fois (B au plus quatre fois), il y a la probabilité

$$Q_4 = \frac{46\,464}{59\,049} = 0{,}786872 \;,$$

et pour que B arrive au plus dix fois (la certitude), il y a bien la probabilité

$$Q_{10} = \frac{59\,049}{59\,049} = 1 \;.$$

Mai 1925.

SOMMES DES PUISSANCES SEMBLABLES DES $p-1$ PREMIERS NOMBRES ENTIERS, p ÉTANT UN NOMBRE PREMIER

PAR

A. Lévy (Paris).

On sait que la congruence

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0 \qquad \text{module } p \;, \qquad\qquad (p \text{ premier})$$

admet comme racines, 1, 2, ..., $p-1$. Les coefficients de cette congruence sont

$$a_1 = 0 \;, \qquad a_2 = 0 \;, \ldots, \; a_{p-2} = 0 \;, \qquad a_{p-1} \equiv 1 \;,$$

où la forme de la congruence générale est

$$x^{p-1} - a_1 x^{p-2} + a_2 x^{p-3} + \ldots + a_{p-1} \equiv 0 \;, \qquad \text{module } p.$$

Par suite, si l'on désigne par A_1 la somme des nombres $1+2+3+\ldots(p-1)$, par A_k la somme des produits des nombres pris k à k, on a

$$A_k \equiv 0 \quad \text{module } p\,, \qquad A_{p-1}+1 \equiv 0\,, \quad \text{module } p\,.$$

On sait aussi que si l'on désigne par S_k la somme des puissances semblables

$$S_k^{p-1} = 1^k + 2^k + \ldots + (p-1)^k\,,$$

on a

$$S_k \equiv 0\,, \qquad \text{mod. } p$$

pour $k = 1, 2, \ldots, (p-2)$.

THÉORÈME. — *Le numérateur de* S_{2i}^p *contient le facteur* $p(p+1)(2p+1)$ *et le numérateur de* S_{2i+1}^p *contient le facteur* $p^2(p+1)^2$.

Soit le polynome

$$\varphi_n(x) = (x+1)^n + (x+2)^n + \ldots + (x+p)^n\,.$$

En développant

$$\varphi_n(x) = x^n + C_n^1 S_1^p x^{n-1} + C_n^2 S_2^p x^{n-2} + \ldots + S_n^p\,.$$

Si n est impair

$$\varphi_n(-x) = -x^n + C_n^1 S_1^p x^{n-1} - C_n^2 S_2^p x^{n-2} + \ldots + S_n^p\,.$$

Donc

$$\varphi_n(x) + \varphi_n(-x) = 2\left[S_n^p + C_n^2 S_{n-2}^p x^2 + C_n^4 S_{n-4}^p x^4 + \ldots + C_n^{n-1} S_1^p x^{n-1}\right].$$

Faisons $x = 1$ dans cette formule, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} &2^n + 3^n + \ldots + (p+1)^n + 1^n + 2^n + \ldots + (p-1)^n \\ &= 2(1^n + 2^n + \ldots + p^n) + 2\left[C_n^2 S_{n-2}^p + C_n^4 S_{n-4}^p + \ldots + C_n^{n-1} S_1^p\right]. \end{aligned}$$

En mettant $2S_1^p = p(p+1)$, cette formule s'écrit

$$\begin{aligned} &(p+1)^n - p^n - 1 - np(p+1) \\ &\qquad = 2\left[C_n^2 S_{n-2}^p + C_n^4 S_{n-4}^p + \ldots + C_n^{n-3} S_3^p\right]. \qquad (1) \end{aligned}$$

Le polynome en p

$$(p+1)^n - p^n - 1 - np(p+1)$$

est divisible par $p^2(p+1)^2$, on peut vérifier en faisant $p = 0$, $p + 1 = 0$ dans ce polynome et sa dérivée par rapport à p.

Or $S_3^p = \frac{p^2(p+1)^2}{4}$. Mais on a

$$(p+1)^7 - p^7 - 1 - 7p(p+1) = 2C_7^2 S_5^p + 2C_7^2 S_3^p ,$$

donc S_5^p contient $p^2(p+1)^2$ en facteur et la formule de récurrence trouvée prouve que ce résultat reste le même pour S_7^p, S_9^p, S_{11}^p, etc.

Supposons maintenant n pair. Alors

$$\varphi_n(x) + \varphi_n(-x) = 2\left[S_n^p + C_n^2 S_{n-2}^p x^2 + C_n^4 S_{n-4}^p x^4 + \dots + x^n\right]. \qquad (2)$$

Faisons $x = 1$, après toutes les réductions, on aura

$$(p+1)^n - p^n - 2p - 1 = 2\left[C_n^2 S_{n-2}^p + C_n^4 S_{n-4}^p + \dots + C_n^{n-2} S_2^p\right],$$

Le polynome du premier membre est divisible par le facteur $p(p+1)(2p+1)$ et comme $S_2^p = \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$, S_4^p admettra le même facteur et de même S_6^p, S_8^p ... . *Le théorème est vrai pour* $n = 2, 4, \dots, (p-3)$ *et non pour* $n = p - 1$.

Corollaire. — En remplaçant p par $p - 1$, on voit que le numérateur de S_{2i+1}^{n-1} est divisible par $(p-1)p(2p-1)$ et que le numérateur de S_{2i+1}^{p-1} contient le facteur $(p-1)^2 p^2$.

Si p est premier, S_{2i}^{p-1} est divisible par p, S_{2+i}^{p-1} est divisible par $(p-1)^2$.

De plus, si $2p-1$ est premier, S_{2i}^{p-1} est divisible par $2p-1$ et si $2p+1$ est premier, S_{2i}^p est divisible par $2p+1$.

Théorème. — Si l'on désigne par A_n^{p-1} le produit n à n des $(p-1)$ premiers nombres entiers, le nombre A_n^{p-1} est divisible par p. *Il l'est aussi par* p^2 *pour* n *impair supérieur à un.*

Je considére les formules

$$(x+1)(x+2)\dots(x+p-1)$$
$$= x^{p-1} + A_1^{p-1} x^{p-2} + \dots + A_{p-2}^{p-1} x + A_{p-1}^{p-1}, \qquad (1)$$

$$(x-1)(x-2)\dots(x-p+1)$$
$$= x^{p-1} - A_1^{p-1} x^{p-2} + A_2^{p-1} x^{p-3} - \dots - A_{p-2}^{p-1} x + A_{p-1}^{p-1} \qquad (2)$$

En faisant la différence et en donnant à n la valeur 1, on a

$$p! = 2\left[A_1^{p-1} + A_3^{p-1} + \ldots + A_{p-2}^{p-1}\right].$$

En retranchant A_1^{p-1}, on a

$$p! - p(p-1) = 2\left[A_3^{p-1} + A_5^{p-1} + \ldots + A_{p-2}^{p-1}\right].$$

ou encore

$$p[(p-1)! + 1 - p] = 2\left[A_3^{p-1} + A_5^{p-1} + \ldots + A_{p-2}^{p-1}\right].$$

Le premier membre se divise par p^2, puisque

$$(p-1)! + 1 \equiv 0 . \qquad \text{module } p$$

(théorème de Wilson).

En faisant la différence de (1) et de (2) pour $x = 2$, on trouve

$$3.4 \ldots p(p+1) = 2\left[2^{p-2}A_1^{p-1} + 2^{p-4}A_3^{p-1} + \ldots + 2A_{p-2}^{p-1}\right],$$

en retranchant $A_1^{p-2} \times 2^{p-1}$ des deux membres, on a

$$3.4 \ldots p(p+1) - 2^{p-1}p(p-1)$$
$$= 2^2\left[2^{p-5}A_3^{p-1} + 2^{p-7}A_5^{p-1} + \ldots + A_{p-2}^{p-1}\right],$$

ou encore

$$p[2.3 \ldots (p-1)(p+1) - 2^{p-1}(p-1)]$$
$$= 4\left[2^{p-5}A_3^{p-1} + 2^{p-7}A_5^{p-1} + \ldots + A_{p-2}^{p-2}\right].$$

En vertu des théorèmes de Wilson et de Fermat [1], le second facteur du premier membre est de la forme

$$(kp-1)(p+1) - (mp+1)(p-1),$$

nombre qui contient p en facteur. Le premier membre est donc divisible par p^2. En faisant les mêmes opérations sur les formules (1), (2) mais pour $x = 3, 4, \ldots, (p-1)$, on arrive à remarquer que la congruence

$$A_3^{p-1}x^{p-4} + A_5^{p-1}x^{p-6} + \ldots + A_{p-2}^{p-1}x \equiv 0 \qquad \text{mod. } p^2$$

[1] Les calculs faits au moment de ces remarques peuvent, comme le lecteur l'aura constaté, donner une démonstration du théorème de Wilson, et aussi une démonstration du théorème de Fermat.

admet plus de $p-1$ racines, ce qui exige

$$A_3^{p-1} \equiv 0 \ , \qquad \text{mod. } p^2$$

$$A_5^{p-1} \equiv 0 \ , \qquad \text{mod. } p^2$$

$$\vdots$$

$$A_{p-2}^{p-1} \equiv 0 \ . \qquad \text{mod. } p^2$$

Corollaire. — L'expression

$$(p+1)(p+2)\ldots(2p-1) - 1.2\ldots(p-1)$$

est divisible par p^3 et par suite aussi

$$\frac{(p+1)(p+2)\ldots(2p-1)}{1.2\ldots(p-1)} - 1 \ .$$

En effet

$$(p+1)(p+2)\ldots(p+p-1) = p^{p-1} + A_1^{p-1}p^{p-2} + \ldots + A_{p-1}^{p-1}$$

$$A_{p-1}^{p-1} = (p-1)(p-2)\ldots[p-(p-1)] = p^{p-1} - A_1^{p-1}p^{p-2} + \ldots + A_{p-1}^{p-1} \ ,$$

donc

$$(p+1)(p+2)\ldots(2p-1) - (p-1)!$$
$$= 2\left[p^{p-2}A_1^{p-1} + p^{p-4}A_3^{p-1} + \ldots + pA_{p-2}^{p-1}\right] .$$

D'après ce qui précède, le second membre est divisible par p^3. Il en sera de même pour l'expression donnée.