

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 24 (1924-1925)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SPECTRES DES PROBABILITÉS
Autor: Petrovitch, Michel
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-515761>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SPECTRES DES PROBABILITÉS

P A R

M. Michel PETROVITCH (Belgrade).

Je désigne comme *spectre* d'une suite limitée ou illimitée de nombres

$$M_1, M_2, M_3, \dots \quad (1)$$

un nombre décimal S rattaché à la suite (1) et jouissant de cette propriété que chaque nombre M_k est, directement ou indirectement, déterminé par un groupe de décimales successives de S.

Comme je l'ai montré¹, on peut calculer un spectre d'une suite (1) toutes les fois que cette suite se laisse mettre en correspondance avec une série de puissances dont les coefficients ou bien sont des nombres réels entiers positifs N_k , ou bien se laissent ramener à de tels nombres par une transformation

$$\Omega(M_k, N_k, k) = 0. \quad (2)$$

Or, dans un grand nombre de problèmes de probabilités, la probabilité considérée apparaît comme coefficient d'une puissance x_k dans le développement d'une fonction déterminée $f(x)$ rattachée au problème, ou, plus généralement, comme coefficient de $x^k y^h z^m \dots$ dans le développement d'une fonction déterminée $F(x, y, z, \dots)$.

Pour ne citer qu'un des problèmes fondamentaux et des plus élémentaires de cette espèce, considérons deux événements contraires A et B, ayant pour probabilités respectives p et q sur μ événements dans lesquels l'un ou l'autre de ces événements doit arriver infailliblement. La probabilité α_k pour que, sur

¹ *Les spectres numériques* (Gauthier-Villars, Paris, 1919).

u épreuves, l'événement A se produise $\mu - k$ fois (et B k fois), coïncidera avec le coefficient de x^k du polynôme

$$f(x) = (p + qx)^\mu = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_\mu x^\mu, \quad (3)$$

p et q étant les probabilités respectives de A et B.

La combinaison la plus probable, c'est-à-dire dans laquelle le nombre d'arrivées de l'événement A est μp , et celui de B μq , a la probabilité égale au coefficient de $x^{(1-p)\mu}$ dans le développement (1).

La probabilité pour que, sur μ épreuves, l'événement A arrive au moins $\mu - k$ fois (c'est-à-dire l'événement B au plus k fois), coïncide avec le coefficient de x^k ($k = 1, 2, 3 \dots \mu$) dans le développement

$$f_1(x) = \frac{(p + qx)^\mu}{1 - x} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots \quad (4)$$

Lorsque les u épreuves assignent aux événements A et B les probabilités successives

$$(p_1, q_1), (p_2, q_2), \dots (p_\mu, q_\mu),$$

la probabilité pour que A arrive au cours de ces μ épreuves m fois, et B n fois, coïncide avec le coefficient de $x^m y^n$ dans le développement de la fonction

$$F(x, y) = (xp_1 + yq_1)(xp_2 + yq_2) \dots (xp_\mu + yq_\mu). \quad (5)$$

Dans de pareils cas, la probabilité considérée P_k varie avec un entier positif k désignant, par exemple, le nombre de fois qu'un événement déterminé, dans des circonstances déterminées, est présumé d'arriver sur un nombre fixe μ d'épreuves.

Formons le polynôme de degré μ

$$f(x) = P_1 x + P_2 x^2 + \dots + P_\mu x^\mu, \quad (6)$$

et soit

$$\Omega(u, v) = 0, \quad (7)$$

une relation telle qu'à chaque valeur $u = P_k$ correspond, comme solution de (7), un nombre entier positif $v = N_k$. Enfin, soit

$$\varphi(x) = N_1 x + N_2 x^2 + \dots + N_\mu x^\mu, \quad (8)$$

le polynôme de degré μ ayant pour coefficients les entiers N_k .

Un spectre S de la suite de probabilités P_k sera fourni par la valeur que prend $\varphi(x)$ pour $x = 10^{-h}$, où h est un entier positif convenablement choisi. Notamment, h est un entier quelconque égal ou supérieur au logarithme du plus grand terme de la suite N_k .

La probabilité P_k pour que l'événement se produise k fois sur μ épreuves, sera fournie par la solution en u de l'équation (7), après y avoir remplacé v par le groupe de décimales de S commençant par la $(hk+1)$ ière et terminé par la $(k+1)h$ ière décimale.

Dans un grand nombre de problèmes, on connaîtra facilement les polynomes $j(x)$ et $\varphi(x)$ rattachés au problème, comme on le voit déjà sur les exemples simples cités. Les probabilités respectives de deux événements A et B étant deux nombres rationnels

$$p = \frac{A}{M} , \quad q = 1 - \frac{A}{M} , \quad (9)$$

on aura

$$\Omega(u, v) = M^u u - v , \quad (10)$$

$$\varphi(x) = M^x [(p + qx)^x - p^x] , \quad (11)$$

Dans l'exemple où

$$p = \frac{2}{3} , \quad q = \frac{1}{3} , \quad (12)$$

le spectre des probabilités pour que, sur 10 épreuves, l'événement A se produise $10-k$ fois (et B k fois) ($k=1, 2, 3 \dots 10$), sera fourni par la valeur que prend l'expression

$$\varphi(x) = 3^{10} \left[\left(\frac{2}{3} + \frac{x}{3} \right)^{10} - \left(\frac{2}{3} \right)^{10} \right] = (2+x)^{10} - 2^{10} , \quad (13)$$

pour $x = 10^{-h}$. Sachant qu'aucun entier N_k n'a plus de cinq chiffres, on peut prendre $h = 5$, ce qui fournit comme spectre des probabilités

$$\begin{aligned} S &= (2 + 10^{-5})^{10} - 2^{10} = \\ &= 0,05120\,11520\,15360\,13440\,08064\,03360\,00960\,00180\,00020\,00001 . \end{aligned} \quad (14)$$

La probabilité pour que, sur 10 épreuves, l'événement A arrive $10-k$ fois (et B k fois), s'obtient en divisant par

$$M^x = 3^{10} = 59049 ,$$

le groupe de décimales de S commençant par la $(hk + 1)^{\text{ième}}$ et terminée par la $(k + 1)h^{\text{ième}}$ décimale. Ainsi, pour que A arrive six fois et B quatre fois, il y a la probabilité

$$P_4 = \frac{8064}{59049} = 0.136545 .$$

La combinaison la plus probable est celle ayant comme probabilité le groupe de décimales 15360 divisé par 59049, c'est-à-dire la probabilité 0,260123; c'est la combinaison où A arriverait sept fois et B trois fois dans dix épreuves.

Vérification: la probabilité pour que, sur dix épreuves, B arrive au plus μ fois, c'est-à-dire la certitude, est bien égale à la somme de tous les groupes successifs à cinq décimales de S, augmentée de $2^{10} = 1024$, le tout divisé par 59049, ce qui fait

$$\frac{1024 + 5120 + 11520 + 15360 + 13440 + 8064 + 3360 + 960 + 180 + 20 + 1}{59049} = 1 .$$

Les probabilités respectives de A et B étant (9), la détermination de la probabilité Q_k pour que, sur μ épreuves, A arrive au moins k fois (et B au plus $\mu - k$ fois) ($k = 1, 2, \dots, \mu$) se ramène à la formation du spectre suivant:

Le nombre Q_k étant la somme de k premiers coefficients de la fonction $(p + qx)^\mu$, admettra encore la transformation (10) et le spectre des Q_k sera fourni par la valeur que prend l'expression

$$\varphi_1(x) = M^\mu \frac{(p + qx)^\mu}{1 - x} , \quad (15)$$

pour $x = 10^{-h}$, où h désigne un entier quelconque égal ou supérieur au logarithme du plus grand terme de la suite correspondante N_h . Le spectre sera donc le nombre

$$S = M^\mu \frac{(10^h p + q)^\mu}{10^{\mu h} - 10^{(\mu-1)h}} . \quad (16)$$

La probabilité Q_k sera

$$Q_k = S_k M^{-\mu} , \quad (17)$$

où S_k représente le groupe de décimales de S commençant par le $(hk + 1)^{\text{ième}}$ et terminé par le $(k + 1)h^{\text{ième}}$ décimale.

Dans l'exemple cité où p et q ont les valeurs (12), on peut prendre $h = 5$ et l'on aura

$$\begin{aligned} S &= \frac{(2 \cdot 10^5 + 1)^{10}}{10^{50} - 10^{45}} = \\ &= 0,06144176643302446464545285788858848590285904859049 . \end{aligned}$$

La probabilité pour que, sur dix épreuves, l'événement A arrive au moins $10-k$ fois (et B au plus k fois) s'obtient en divisant par 59049 le groupe de décimales de S commençant par la $(hk+1)$ ^{ème} et terminée par la $(k+1)h$ ^{ème} décimale. Ainsi, pour que A arrive au moins six fois (B au plus quatre fois), il y a la probabilité

$$Q_4 = \frac{46464}{59049} = 0,786872 ,$$

et pour que B arrive au plus dix fois (la certitude), il y a bien la probabilité

$$Q_{10} = \frac{59049}{59049} = 1 .$$

Mai 1925.

SOMMES DES PUISSANCES SEMBLABLES
DES $p-1$ PREMIERS NOMBRES ENTIERS,
 p ÉTANT UN NOMBRE PREMIER

PAR

A. LÉVY (Paris).

On sait que la congruence

$$x^{p-1} - 1 \equiv 0 \quad \text{modulo } p , \quad (p \text{ premier})$$

admet comme racines, 1, 2, ..., $p-1$. Les coefficients de cette congruence sont

$$a_1 = 0 , \quad a_2 = 0 , \dots , \quad a_{p-2} = 0 , \quad a_{p-1} \equiv 1 ,$$

où la forme de la congruence générale est

$$x^{p-1} - a_1 x^{p-2} + a_2 x^{p-3} + \dots + a_{p-1} \equiv 0 , \quad \text{modulo } p .$$