

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 24 (1924-1925)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA PÉDAGOGIE DES THÉORIES D'EINSTEIN
Autor: Buhl, A.
Kapitel: XII. — Equations gravifiques générales.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-515760>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

On conclut de là, d'après la dernière identité (43),

$$G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu} . \quad (45)$$

L'expression

$$G = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu}$$

donne, d'après ce que nous avons vu (§ VI) pour toutes les expressions de même nature,

$$G_\sigma = \frac{DG}{Dx_\sigma} = \frac{\delta G}{\delta x_\sigma} . \quad (46)$$

On sait que G est la *courbure scalaire* pour l'espace dont le ds^2 est

$$ds^2 = g_{ij} dx_i dx_j .$$

Dans le cas d'une surface ordinaire, G se réduit à la courbure totale.

XII. — EQUATIONS GRAVIFIQUES GÉNÉRALES.

Reprendons l'identité de Bianchi, sous la forme (38), et *contractons* la en faisant τ égal à ρ ; il vient

$$(B_{\mu\nu\sigma}^\rho)_\rho + G_{\mu\nu\nu} - G_{\mu\nu\sigma} = 0 .$$

On conclut de là

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} (B_{\mu\nu\sigma}^\rho)_\rho &= (g^{\mu\nu} B_{\mu\nu\sigma}^\rho)_\rho = (g^{\mu\nu} g^{\rho\tau} B_{\mu\nu\sigma\tau})_\rho \\ &= (g^{\rho\tau} g^{\mu\nu} B_{\tau\sigma\nu\mu})_\rho = (g^{\rho\tau} B_{\tau\sigma\nu})_\rho = (g^{\rho\tau} G_{\tau\sigma})_\rho = G_{\sigma\rho} . \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} G_{\mu\nu\nu} &= (g^{\mu\nu} G_{\mu\nu})_\nu = G_{\sigma\nu} , \\ g^{\mu\nu} G_{\mu\nu\sigma} &= (g^{\mu\nu} G_{\mu\nu})_\sigma = G_\sigma . \end{aligned}$$

Donc, en tenant compte de (46),

$$2G_{\sigma\nu}^\nu = \frac{\delta G}{\delta x_\sigma} . \quad (47)$$

Telle est l'identité fondamentale de la Mécanique einsteinienne; au fond ce n'est que l'identité de Bianchi *contractée*. Le raisonnement ici employé est encore emprunté à M. A.-E. Harward.

L'identité (47) peut s'écrire

$$\left(G_{\sigma}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\sigma}^{\nu} G \right)_{\nu} = 0 .$$

L'expression identiquement nulle ainsi formée est une *divergence* généralisée; si, pour raison expérimentale, par exemple, ou, dans une théorie physique quelconque, on se trouve en présence d'une autre divergence $T_{\sigma\nu}^{\nu}$ nulle, on pourra tenter une théorie phénoménale en posant

$$G_{\sigma}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\sigma}^{\nu} G \equiv T_{\sigma}^{\nu} . \quad (48)$$

Telles sont les équations générales d'Einstein. Le signe \equiv indique que l'égalité peut n'avoir lieu qu'à un facteur constant près, facteur pouvant simplement dépendre du choix des unités.

Rappelons que, dans le cas de la matière discontinue (cas astronomique), la loi de gravitation est simplement

$$G_{\mu\nu} = 0 . \quad (49)$$

Il y a là *dix* équations permettant de déterminer les *dix* $g_{\mu\nu}$ d'un ds^2 quadridimensionnel. Les équations (49), d'après la dernière (34), peuvent être remplacées par les suivantes :

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} \\ \frac{DP^i}{Dx_i} & \frac{DP^i}{Dx_j} \end{array} \right| = 0 , \quad \left| \begin{array}{cc} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} \\ \frac{DP^j}{Dx_i} & \frac{DP^j}{Dx_j} \end{array} \right| = 0 , \quad (50)$$

qui doivent avoir lieu quel que soit le vecteur P. Ces deux formes n'en font qu'une mais si l'on n'en écrivait qu'une on pourrait croire, à tort, que la loi de gravitation n'est pas parfaitement symétrique.

Que l'on revienne maintenant aux équations générales de l'électromagnétisme, déduites (§ I) du déterminant Δ_2 , à la loi de gravitation exprimée en (50), aux équations générales (48) déduites de l'identité de Bianchi (40) et l'on pourra admirer la synthèse einsteinienne en ses résultats les plus symétriques et les plus élémentaires.

Au point de vue analytique, les symétries ne sont que des symétries de déterminants. Le « Calcul tensoriel » ou le « Calcul différentiel absolu » peuvent n'être considérés que comme des prolongements, exceptionnellement heureux toutefois, de la théorie des déterminants fonctionnels.

Remarquons encore que (49) est un cas particulier de (48). En effet

$$G_{\sigma} = g^{\nu\alpha} G_{\sigma\alpha}, \quad G = g^{\mu\nu} G_{\mu\nu}.$$

Donc (49) coïncide avec (48) à second membre nul.

XIII. — ANALOGIES. — GROUPES.

Nous revenons ici, avec une extrême brièveté, sur les fondements de la Théorie des Groupes continus due à Sophus Lie. Le but est de montrer les analogies entre l'analyse de Lie et l'analyse précédente. Nous reprenons les échelons des démonstrations fondamentales en sautant de l'un à l'autre sans démonstrations développées; pour celles-ci le mieux serait de se reporter aux excellentes *Lezioni* de Luigi Bianchi.

1. — Soient les formules de transformation

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; a_1, a_2, \dots, a_r). \quad (51)$$

Leur itération donne

$$x''_i = f_i(x'_1, x'_2, \dots, x'_n; b_1, b_2, \dots, b_r) \quad (52)$$

ou bien, si ces formules donnent naissance à un groupe,

$$x''_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; c_1, c_2, \dots, c_r). \quad (53)$$

Montrons d'abord qu'il existe de certaines fonctions F des x' et des a restant constantes, c'est-à-dire donnant

$$dF = \frac{\partial F}{\partial a_k} + \frac{\partial F}{\partial x'_i} \frac{\partial x'_i}{\partial a_k} = 0.$$

en vertu d'équations différentielles à former.