Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 23 (1923)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: MÉTHODES D'APPROXIMATION DANS LE CALCUL DU NOMBRE DES POINTS A COORDONNÉES ENTIÈRES

Autor: van der Corput, J. G.

Kapitel: 3. — La méthode de Voronoï.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19730

difficile de savoir quelle méthode il a employée, que nous connaissons déjà cinq méthodes générales pour améliorer les résultats précédents, une méthode géométrique, une méthode arithmétique et trois méthodes analytiques, dont une découle de l'étude des variables complexes et les deux autres de l'étude des variables réelles [1].

3. — *La méthode de Voronoï.*

C'est Voronoï [2] qui a découvert la méthode géométrique (1903). Comme Dirichlet, il décompose le domaine D_1, mais il le fait d'une autre manière. Il construit q tangentes à l'hyperbole équilatère $uv = x$, de sorte que le domaine est décomposé en un polygone (de $q + 2$ côtés) et en $q + 1$ segments. Il calcule approximativement le nombre des points entiers de chacun de ces domaines; les points entiers qui pourraient se trouver sur l'une des tangentes, sont comptés ou avec le polygone ou avec l'un des segments. Il choisit le nombre q et la direction des tangentes tels que l'erreur soit la plus petite possible. Son résultat est

$$\Delta(x) = O(\sqrt[3]{x} \log x) \; ; \tag{3}$$

il est donc bien meilleur que celui de Dirichlet.

Avec la méthode de Dirichlet le domaine est décomposé en 3 parties, avec la méthode de Voronoï en $q + 2$ parties, et ce qu'il y a d'intéressant dans cette dernière méthode est que q croît indéfiniment avec x.

Voronoï s'est rendu compte que sa méthode pouvait être appliquée non seulement dans le problème des diviseurs, mais dans bien d'autres problèmes; on le sait par la fin de l'introduction de son travail:

« Il est aisé de généraliser, dit-il, la méthode exposée dans ce mémoire et de l'appliquer aux recherches des valeurs asymptotiques de différentes sommes multiples. »

---

[1] Nous ne considérerons pas la méthode de Wigert (*Math. Zs.*, 5 (1919), p. 310-318), parce que jusqu'à présent on ne l'a employée que dans le problème du cercle, d'autant plus que l'ordre de l'erreur trouvé par M. Wigert est un peu plus grand que l'ordre trouvé par les autres méthodes.

[2] *J. für Math.*, 126 (1903), p. 241-282.

M. Sierpiński[1] applique la méthode de Voronoï au problème du cercle, et il trouve

$$\mathrm{P}(x) = \mathrm{O}(\sqrt[3]{x}) \,, \tag{4}$$

donc un résultat bien meilleur que celui de Gauss.

4. — *La méthode de Piltz.*

C'est M. Piltz qui a trouvé la méthode arithmétique (1881). Comme nous l'avons déjà fait remarquer à propos de la méthode de Dirichlet, il suffit dans le problème des diviseurs de s'occuper de la somme

$$\sum_{\substack{1 \leqq h \leqq \sqrt{x} \\ h \text{ entier}}} \psi\left(\frac{x}{h}\right) ,$$

où pour abréger on a posé $\psi(v) = v - \mathrm{E}(v) - \frac{1}{2}$.

Dirichlet se sert de la borne supérieure triviale $\frac{1}{2}\sqrt{x}$ pour la valeur absolue de cette somme, mais M. Piltz a remarqué que, si x est grand, les termes négatifs atténuent l'influence des termes positifs. Il décompose l'intervalle $(1, \sqrt{x})$ en intervalles partiels, et il montre qu'en choisissant d'une manière appropriée les points de division, la contribution de chaque intervalle partiel à la somme en question est d'un ordre plus petit que la longueur de l'intervalle, d'où l'on déduit que la valeur absolue de la somme considérée est d'un ordre inférieur à $\sqrt{x}$.

L'idée fondamentale de la méthode de Piltz est donc de réunir beaucoup de termes

$$\psi\left(\frac{x}{t}\right) + \psi\left(\frac{x}{t+1}\right) + \dots + \psi\left(\frac{x}{t+\mathrm{B}-1}\right) ,$$

de telle façon que la valeur absolue de cette somme reste cependant relativement petite. Pour cela on doit pouvoir trouver une borne supérieure de cette valeur absolue, ce qui se fait de la façon suivante:

---

[1] *Prace mat. fiz.*, 17 (1906), p. 77-114.