

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 23 (1923)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR L'INTÉGRATION DE QUELQUES ÉQUATIONS  
DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE  
**Autor:** Lainé  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-19736>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

métrique au moyen des fonctions elliptiques. Malheureusement les calculs sont si extraordinairement laborieux qu'il nous faut y renoncer, pour le moment tout au moins.

CONCLUSION. — A part les quelques difficultés que nous avons signalées dans les trois derniers numéros, nous voyons toutes les propriétés importantes de la courbe découler, presque automatiquement, de la représentation paramétrique adoptée.

Mais en dehors de son intérêt possible pour la géométrie algébrique, le présent article pourrait être envisagé comme un simple exercice d'analyse: la représentation graphique de la relation qui lie entre elles, dans le domaine réel des applications, les deux premières dérivées de la fonction elliptique fondamentale.

Enfin nous avons interprété, sur un même dessin, les zéros de la fonction  $pu$  et de ses deux premières dérivées (et même de la troisième puisque l'on a:  $p''' = 12 p \cdot p'$ ).

Liège (Université), le 5 novembre 1923.

---

## SUR L'INTÉGRATION DE QUELQUES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

PAR

l'Abbé LAINÉ (Angers).

---

1. Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}{2} y'' + (ax + b) y' + \lambda y = 0. \quad (1)$$

Pour simplifier, nous poserons

$$\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 2X.$$

Dérivons  $n$  fois l'équation (1); nous aurons

$$X y^{(n+2)} + [(a + n\alpha)x + b + n\beta] y^{(n+1)} + \left[ na + \lambda + \frac{n(n-1)}{2} \alpha \right] y^{(n)} = 0.$$



et elle aurait une racine entière positive  $m < n$ , contrairement à l'hypothèse.

Posons en particulier  $P_{n+1} = 1$ ,  $P_n = 0$ ; la relation (4) définit alors une suite de polynômes  $P_{n+1}$ ,  $P_n$ , ...,  $P_1$ ,  $P_0$ , dont le dernier est au plus de degré  $n + 1$ .

Posons de même  $Q_{n+1} = 0$ ,  $Q_n = 1$ ; la relation (4) définit encore une suite de polynômes  $Q_{n+1}$ ,  $Q_n$ , ...,  $Q_1$ ,  $Q_0$ , dont le dernier est au plus de degré  $n$ .

3. Soit maintenant  $\varphi$  une certaine fonction de  $x$ , telle que la dernière équation (3) soit satisfaite si l'on fait  $y^{(n)} = \varphi$ ; posons en outre  $y^{(n+1)} = \frac{d\varphi}{dx} = u$ . L'avant-dernière équation (3) donne alors

$$y^{(n-1)} = P_{n-1} u + Q_{n-1} \varphi,$$

et, d'après la définition même des polynômes  $P_m$  et  $Q_m$ , on voit aisément qu'en remontant de proche en proche la chaîne des équations (3), on aura

$$y^{(m)} = P_m u + Q_m \varphi.$$

On en déduit que la fonction

$$y = P_0 u + Q_0 \varphi$$

est une intégrale de l'équation (1).

On peut évidemment prendre  $\varphi = 1$ , d'où  $u = 0$ , ce qui montre que l'équation (1) admet comme intégrale particulière un polynôme  $Q_0$  de degré au plus égal à  $n$ ,  $n$  désignant toujours la plus petite racine entière positive de l'équation (2).

En prenant pour  $u$  une intégrale non nulle de l'équation

$$X \frac{du}{dx} + [(a + n\alpha)x + b + n\beta]u = 0,$$

on pourra obtenir, par le procédé ci-dessus, une intégrale particulière de l'équation (1), évidemment distincte de la première. Ainsi on aura en définitive l'intégrale générale par une seule quadrature.

4. Examinons successivement les différentes formes du polynôme  $X(x) = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)$ , supposé à coefficients réels.



1<sup>er</sup> cas. — Soit d'abord  $\alpha = \beta = 0$ . On peut mettre l'équation (1) sous la forme

$$y'' + axy' + \lambda y = 0 ;$$

l'équation (2) est du premier degré, et pour que la méthode exposée s'applique, il faut et il suffit que  $-\frac{\lambda}{a}$  soit un entier positif  $n$ . La dernière équation (3) s'écrit alors

$$y^{(n+2)} + axy^{(n+1)} = 0 ;$$

on peut donc prendre

$$u = e^{-a\frac{x^2}{2}}, \quad v = \int_{x_0}^x e^{-a\frac{x^2}{2}} dx ,$$

et l'intégrale générale s'écrit

$$y = Ae^{-a\frac{x^2}{2}} P_0(x) + \left( A \int_{x_0}^x e^{-a\frac{x^2}{2}} dx + B \right) Q_0(x) ,$$

$P_0$  et  $Q_0$  désignant des polynômes de degrés  $n-1$  et  $n$  respectivement.

2<sup>me</sup> cas. — Si  $\alpha$  est nul et  $\beta$  différent de 0, on peut mettre l'équation (1) sous la forme

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0 ;$$

la méthode exposée s'applique si  $-\alpha$  est un entier positif  $n$ . L'intégrale générale s'écrit alors

$$y = Ax^{-\gamma-n} e^x P_0(x) + \left( A \int_{x_0}^x x^{-\gamma-n} e^x dx + B \right) Q_0(x) ,$$

$P_0$  et  $Q_0$  désignant des polynômes de degré  $n$ . En particulier, si  $\gamma$  est un entier inférieur ou égal à  $-n$ , on pourra faire disparaître le signe  $\int$ .

3<sup>me</sup> cas. — Supposons enfin  $\alpha \neq 0$ . La méthode s'applique si l'équation (2), qui est alors du second degré, a au moins une racine entière positive; nous désignerons toujours par  $n$  la plus petite racine entière positive de l'équation (2).

I. *Le polynôme X a ses racines égales.* L'équation (1) peut alors se mettre sous la forme

$$\frac{x^2}{2} y'' + (ax + b)y' + \lambda y = 0 ,$$

et son intégrale générale s'écrit

$$y = Ax^{-2(a+n)} e^{\frac{2b}{x}} P_0(x) + \left[ A \int_{x_0}^x x^{-2(a+n)} e^{\frac{2b}{x}} dx + B \right] Q_0(x) .$$

En particulier, si  $2(a+n-1)$  est un entier positif, ou si  $b$  est nul (équation d'Euler), on pourra faire disparaître le signe  $f$ .

II. *Le polynôme X a ses racines réelles et inégales.* — L'équation (1) peut alors s'écrire

$$\frac{x^2 - 1}{2} y'' + (ax + b)y' + \lambda y = 0 ,$$

et son intégrale générale a la forme

$$y = A(x+1)^{-a+b-n} (x-1)^{-a-b-n} P_0(x) + \left[ A \int_{x_0}^x (x+1)^{-a+b-n} (x-1)^{-a-b-n} dx + B \right] Q_0(x) .$$

On pourra faire disparaître le signe  $f$  si l'un des 3 nombres  $a+b$ ,  $a-b$ ,  $2a$ , est entier; c'est ce qui a lieu en particulier pour l'équation

$$\frac{x^2 - 1}{2} y'' + xy' - \frac{n(n+1)}{2} y = 0 ,$$

à laquelle satisfait le polynôme  $X_n$  de Legendre.

III. *Le polynôme X a ses racines imaginaires.* — L'équation (1) peut alors s'écrire

$$\frac{x^2 + 1}{2} y'' + (ax + b)y' + \lambda y = 0 ,$$

et son intégrale générale a la forme

$$y = A(1+x^2)^{-a-n} e^{-2b \operatorname{arctg} x} P_0(x) + \left[ A \int_{x_0}^x (1+x^2)^{-a-n} e^{-2b \operatorname{arctg} x} dx + B \right] Q_0(x) .$$

On pourra faire disparaître le signe  $f$  si  $2(a + n - 1)$  est un entier positif.

5. La méthode qui précède est susceptible de diverses extensions. Faisons dans l'équation (1) le changement de variable  $y = e^{\int u dx} z$ , où  $u$  et  $z$  sont deux fonctions indéterminées. L'équation (1) s'écrira

$$Xz'' + z'(2uX + ax + b) + z[X(u' + u^2) + u(ax + b) + \lambda] = 0. \quad (5)$$

Pour que l'équation (5) ait même forme que (1), il faut et il suffit que l'on puisse déterminer 3 constantes  $A, B, C$ , telles que l'on ait identiquement

$$uX = Ax + B \quad X(u^2 + u') + u(ax + b) = C. \quad (6)$$

En posant pour simplifier  $A - C = -2D$ , on trouve que les équations (6) sont équivalentes au système

$$\begin{aligned} A(A + a - \alpha) &= D\alpha, & B(B + b - \beta) &= D\gamma, \\ A(B + b - \beta) + B(A + a - \alpha) &= 2D\beta. \end{aligned} \quad (7)$$

Pour continuer la résolution, il est plus simple d'examiner séparément les différents types signalés au N° 4.

6. 1<sup>er</sup> cas. — Si l'équation (1) a la forme

$$y'' + axy' + \lambda y = 0, \quad (8)$$

on aura  $X=1, \alpha=\beta=b=0$ . Le système (7) donne alors, si on écarte la solution  $A = B = 0$  :

$$A = -a, \quad B = 0, \quad D = 0, \quad C = -a;$$

le changement de variable  $y = e^{-a\frac{x^2}{2}} z$  conduit donc de l'équation (8) à l'équation

$$z'' - axz' + (\lambda - a)z = 0 :$$

la méthode s'applique à l'équation ci-dessus quand  $\frac{\lambda}{a}$  est un entier positif. Donc quand  $\frac{\lambda}{a}$  est un entier quelconque, l'équation (8) s'intègre au moyen de la seule quadrature  $\int e^{-ax^2} dx$ .

On peut observer que, quel que soit  $\frac{\lambda}{a}$ , les séries entières

$$H_1(a, \lambda; x) = 1 - \lambda \frac{x^2}{2!} + \lambda(\lambda + 2a) \frac{x^4}{4!} - \lambda(\lambda + 2a)(\lambda + 4a) \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

$$H_2(a, \lambda; x) = x - (\lambda + a) \frac{x^3}{3!} + (\lambda + a)(\lambda + 3a) \frac{x^5}{5!} - \dots,$$

qui sont convergentes dans tout le plan, satisfont à l'équation (8) et font ainsi connaître son intégrale générale. Les considérations qui précèdent mettent en outre en évidence les relations fonctionnelles

$$H_1(a, \lambda; x) = e^{-a \frac{x^2}{2}} H_1(-a, \lambda - a; x),$$

$$H_2(a, \lambda; x) = e^{-a \frac{x^2}{2}} H_2(-a, \lambda - a; x);$$

enfin on a visiblement

$$H_1(0, \lambda; x) = \cos x \sqrt{\lambda}, \quad H_2(0, \lambda; x) = \frac{\sin x \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}.$$

7. — 2<sup>me</sup> cas. — Si l'équation (1) a la forme

$$xy'' + (\gamma - x)y' - \alpha y = 0, \quad (9)$$

le système (7) s'écrit

$$A(A - 1) = 0, \quad B(B + \gamma - 1) = 0, \quad A(B + \gamma - 1) + B(A - 1) = 2D;$$

il admet 3 solutions:

1<sup>o</sup>  $A = 0$ ,  $B = 1 - \gamma$ ,  $2D = \gamma - 1 = C$ ; le changement de variable  $y = x^{1-\gamma} z$  ramène l'équation (9) à la forme

$$xz'' + (2 - \gamma - x)z' - (\alpha + 1 - \gamma)z = 0;$$

la méthode s'appliquera à cette équation si  $\gamma - \alpha$  est un entier positif.

2<sup>o</sup>  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $2D = \gamma - 1$ , d'où  $C = \gamma$ ; le changement de variable  $y = e^x z$  ramène l'équation (9) à la forme

$$xz'' + (x + \gamma)z' - (\alpha - \gamma)z = 0;$$

la méthode s'applique encore si  $\gamma - \alpha$  est nul ou entier négatif.

3°  $A = 1$ ,  $B = 1 - \gamma$ ,  $2D = 0$ , d'où  $C = 1$ ; le changement de variable  $y = x^{1-\gamma} e^x z$  ramène l'équation (9) à la forme

$$xz'' + (2 - \gamma + x)z' - (\alpha - 1)z = 0 ;$$

la méthode s'applique donc si  $\alpha$  est un entier positif.

En résumé, l'équation (9) s'intègre par une quadrature pourvu que l'un des deux nombres  $\alpha$  et  $\gamma - \alpha$  soit entier ou nul. On voit aisément que si ces 2 nombres sont entiers et de même signe, l'intégration s'achève sans quadrature.

On sait<sup>1</sup> que si  $\gamma$  n'est pas un nombre entier, l'intégrale générale de cette équation s'écrit

$$y = AG(\alpha, \gamma; x) + Bx^{1-\gamma}G(\alpha + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x) ,$$

$G(\alpha, \gamma; x)$  désignant la série entière

$$1 + \frac{\alpha}{1 \cdot \gamma}x + \frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma + 1)}x^2 + \dots$$

convergente dans tout le plan. Au moyen des changements de variable indiqués, on met en évidence la relation fonctionnelle

$$G(\gamma - \alpha, \gamma; x) = e^x G(\alpha, \gamma; -x) ,$$

qui est évidemment valable pourvu que  $\gamma$  ne soit pas nul ou entier négatif; on en déduit en particulier, en désignant par  $n$  un entier positif,

$$G(\gamma + n, \gamma; x) = e^x R_n(x) ,$$

$R_n$  désignant un polynôme en  $x$  de degré  $n$ .

8. — 3<sup>me</sup> cas. — Sans entrer dans le détail du calcul, nous indiquerons que le changement de variable

$$y = e^{\int 2 \frac{(1-a)x-b}{x^2+\gamma} dx} z$$

conduit de l'équation

$$\frac{x^2 + \gamma}{2} y'' + (ax + b)y' + \lambda y = 0 \quad (10)$$

à l'équation

$$\frac{x^2 + \gamma}{2} z'' + [2(a - x) - b]z' + (\lambda + 1 - a)z = 0 . \quad (11)$$

<sup>1</sup> Cf. GOURSAT. *Cours d'Analyse*, t. 2, p. 464 (2<sup>e</sup> édition).

Les équations en  $t$  associées aux équations (10) et (11) s'écrivent

$$t^2 + (2a - 1)t + 2\lambda = 0, \quad (12)$$

$$t^2 + (3 - 2a)t + 2(\lambda + 1 - a) = 0, \quad (13)$$

et il est clair que si l'équation (12) admet la racine  $t = n$ , l'équation (13) admet la racine  $t = -(n+1)$ . Ainsi, pourvu que l'équation (12) ait une racine entière, l'équation (10) s'intégrera par une quadrature. Si les 2 racines sont entières et de signes contraires, on aura l'intégrale générale sans quadrature.

9. — Le cas où les racines de  $X$  sont réelles présente une particularité; l'équation différentielle considérée n'est alors autre que l'équation de Gauss, et nous l'écrirons sous la forme usuelle

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0;$$

l'équation associée en  $t$  s'écrit

$$(t + \alpha)(t + \beta) = 0.$$

La méthode du N° 5 conduit aux trois changements de variable suivants:

$$y = x^{1-\gamma} z$$

qui change  $\alpha, \beta, \gamma$ , en  $\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma$ ;

$$y = (1-x)^{-\alpha-\beta+\gamma} z$$

qui change  $\alpha, \beta, \gamma$ , en  $\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma$ ;

$$y = (1-x)^{-\alpha-\beta+\gamma} x^{1-\gamma} z$$

qui change  $\alpha, \beta, \gamma$ , en  $1 - \alpha, 1 - \beta, 2 - \gamma$ .

On aura donc l'intégrale générale par une quadrature pourvu que l'un des nombres  $\alpha, \beta, \alpha - \gamma, \beta - \gamma$  soit entier. Si l'un des couples  $(\alpha, \beta), (\alpha - \gamma, \beta - \gamma)$  comprend deux entiers de signes contraires, on aura l'intégrale générale sans quadrature.

On sait que, si  $\gamma$  n'est pas entier, l'intégrale générale de l'équation de Gauss est représentée, à l'intérieur du cercle de centre  $O$  et de rayon 1, par l'expression

$$y = AF(\alpha, \beta, \gamma; x) + Bx^{1-\gamma}F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma; x),$$

$F(\alpha, \beta, \gamma; x)$  désignant la série hypergéométrique. Les chan-

gements de variable indiqués ci-dessus mettent immédiatement en évidence la relation fonctionnelle

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma; x),$$

qui a été établie par Euler.

10. — On peut employer dans d'autres cas le changement de variable indiqué au N° 5. Considérons par exemple l'équation de Laplace

$$(a_0x + b_0)y'' + (a_1x + b_1)y' + (a_2x + b_2)y = 0 \quad (a_2 \neq 0),$$

et proposons-nous de faire disparaître le terme en  $x$  dans le coefficient de la fonction inconnue. Les équations analogues à (6) s'écrivent alors

$$(a_0x + b_0)u = Ax + B, \quad (a_0x + b_0)(u^2 + u') + u(a_1x + b_1) = -a_2x + C,$$

et l'on a, pour déterminer  $A, B, C$ , les 3 équations

$$\begin{aligned} A^2 + Aa_1 + a_0a_2 &= 0, \\ 2AB + Ab_1 + Ba_1 - Ca_0 + a_2b_0 &= 0, \\ B^2 + Ab_0 - a_0B + Bb_1 - b_0C &= 0, \end{aligned}$$

qui admettent en général 4 solutions. Appliquons ceci en particulier à l'équation de Bessel; on sait que <sup>1</sup>, dans le domaine réel, cette équation se ramène à l'une des deux formes

$$xy'' + 2py' - xy = 0, \quad (14)$$

$$xy'' + 2py' + xy = 0. \quad (15)$$

Considérons d'abord l'équation (14). Les 4 changements de variable

$$y = e^x z, \quad y = e^{-x} z, \quad y = x^{1-2p} e^x z, \quad y = x^{1-2p} e^{-x} z$$

conduisent respectivement aux 4 équations suivantes:

$$xz'' + 2(x+p)z' + 2pz = 0, \quad xz'' - 2(x-p)z' - 2pz = 0, \quad (16)$$

$$xz'' + 2(x+1-p)z' + 2(1-p)z = 0,$$

$$xz'' - 2(x+1-p)z' - 2(1-p)z = 0. \quad (17)$$

<sup>1</sup> Cf. par exemple de la VALLÉE-POUSSIN. *Cours d'Analyse infinitésimale* (4<sup>e</sup> édition), t. II, p. 224.

On en conclut d'abord que l'équation (14) s'intègre sans quadrature si  $p$  est entier. Si  $p$  est entier négatif, on partira des équations (16), et l'on mettra l'intégrale générale de l'équation (14) sous la forme

$$y = Ae^x P_1(x) + Be^{-x} P_2(x) ,$$

$P_1$  et  $P_2$  désignant des polynômes de degré  $-p$ . Si  $p$  est entier positif, on partira des équations (17) et l'on mettra l'intégrale générale de l'équation (14) sous la forme

$$y = Ax^{1-2p} e^x P_1(x) + Bx^{1-2p} e^{-x} P_2(x) ,$$

$P_1$  et  $P_2$  désignant des polynômes de degré  $p-1$ .

Les quatre changements de variable

$$y = e^{ix} z , \quad y = e^{-ix} z , \quad y = x^{1-2p} e^{ix} z , \quad y = x^{1-2p} e^{-ix} z$$

pourraient de la même façon être utilisés pour l'équation (15); mais on peut se borner au premier et au troisième par exemple, qui conduisent de l'équation (15) aux équations

$$xz'' + 2(ix + p)z' + 2ipz = 0 , \quad (18)$$

$$xz'' + 2(ix - p + 1)z' + 2i(p - 1)z = 0 , \quad (19)$$

respectivement. Si  $p$  est entier négatif, on partira de l'équation (18): en prenant l'intégrale de cette équation qui se réduit à un polynôme, la multipliant par  $e^{ix}$  et séparant les parties réelles et les parties imaginaires, on obtient deux intégrales particulières de l'équation (15).

$$y_1 = P_1 \cos x + P_2 \sin x , \quad y_2 = P_1 \sin x - P_2 \cos x ,$$

$P_1$  et  $P_2$  désignant des polynômes de degré  $-p$  et  $-p+1$  respectivement. De même, si  $p$  est entier positif, en partant de l'équation (19), on aura pour l'équation (15), si  $p > 1$ , les deux intégrales particulières.

$$y_1 = x^{1-2p} (P_1 \cos x + P_2 \sin x) , \quad y_2 = x^{1-2p} (P_1 \sin x - P_2 \cos x) ,$$

$P_1$  et  $P_2$  désignant des polynômes de degrés  $p-1$  et  $p-2$  respectivement; si  $p = 1$ , l'équation (19) donne immédiatement l'intégrale générale

$$y = \frac{1}{x} (a \cos x + b \sin x) .$$