Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 23 (1923)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FONCTIONS ELLIPTIQUES ET QUARTIQUES BINODALES 1

Autor: Winants, Marcel

Kapitel: §3. — Les deux cas suivant le signe du discriminant.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19735

mais il est impossible qu'on ait $pu = pv$, car cette égalité combinée à la première équation (20) conduirait à $u \equiv v$, et nous venons de dire que cela ne devait pas être. Donc:

$$pu = -pv \; .$$

La première équation (20) devient alors:

$$4p^3u - g_2 \cdot pu = 4p^3v - g_2 \cdot pv = -(4p^3u - g_2 \cdot pu) = 0 \; ,$$

ou

$$pu(4p^2u - g_2) = 0 \; .$$

L'hypothèse $pu = 0$ aurait pour conséquence $pu = pv$; elle est donc à rejeter. Il reste:

$$4p^2u - g_2 = 0 \; ,$$

c'est-à-dire:

$$pu = \pm \frac{1}{2} \sqrt{g_2} = -pv \; . \tag{21}$$

Les équations (12) donnent alors:

$$x = \pm \sqrt{-g_3} \; , \quad y = g_2 \; ,$$

et, de cette manière, nous retrouvons bien les formules (16).

Si l'invariant g_2 est négatif, la quartique est biacnodale [9], et nous voyons qu'en des points doubles isolés, pu prend effectivement des valeurs imaginaires. Plus haut [9], nous avons énoncé déjà la réciproque de cette dernière proposition.

Si $g_2 = 0$, les deux valeurs (21) que pu prend en chaque point double se confondent, et ces points sont donc des rebroussements [11].

De la relation $pu = -pv$ combinée à la formule (18) résulte cette propriété qu'en chacun des points doubles les deux tangentes ont des directions symétriques par rapport aux axes coordonnés.

§ 3. — *Les deux cas suivant le signe du discriminant.*

13. Après toutes les considérations générales qui précèdent, nous allons distinguer deux cas principaux suivant que le discriminant

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$$

est positif ou négatif. Toutes les notations que nous emploierons sont empruntées au premier volume du *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, de HALPHEN, auquel nous renverrons quelquefois.

14. Ainsi que nous en avons fait plus haut, la remarque les deux fonctions pu, $p'u$ sont réelles tout le long de la courbe, sauf aux points doubles isolés [9, 12].

Dans le cas du discriminant positif, pu devra donc satisfaire à l'une des relations:

$$\Delta > 0 : e_3 \leqq pu \leqq e_2 \,, \qquad \text{ou} \qquad pu \geqq e_1 \,; \tag{22}$$

et, dans le cas contraire:

$$\Delta < 0 : pu \geqq e_2 \,. \tag{23}$$

De (22) nous conclurons que la quartique est bipartite: sur l'une des deux parties, pu varie entre les deux plus petites racines et conserve par conséquent une valeur toujours finie; des formules (13) il résulte que les coordonnées x, y correspondantes sont également finies: nous obtiendrons donc un ovale fermé; sur l'autre partie pu sera égale ou supérieure à la plus grande racine e_1 et pourra croître au-delà de toute limite: nous aurons une branche infinie sur laquelle pu ne pourra prendre que des valeurs positives, puisque

$$pu \geqq e_1 > 0 \,.$$

Comme aux points doubles (21), nous avons:

$$pu = \pm \frac{1}{2} \sqrt{g_2} \,,$$

nous voyons que l'ovale passe aux points doubles.

De (23) il résulte au contraire que, dans le cas d'un discriminant négatif, la quartique étudiée est unipartite.

15. Les points de rencontre de la courbe avec l'axe des y sont déterminés par l'équation.

$$x = p'u = 0 \,.$$

La quartique bipartite ($\Delta > 0$) rencontre l'axe des y en trois points réels pour lesquels on a:

$$p_1 = e_1 \,, \quad p_2 = e_2 \,, \quad p_3 = e_3 \,;$$

le premier de ces points se trouve sur la branche infinie ($pu \geqq e_1$); tandis que les deux autres appartiennent à l'ovale.

Si g_3 est négatif (fig. 1), les racines e_1, e_2 sont positives, tandis que e_3 est négative; on a donc:

$$| e_3 | > e_1 > e_2 ;$$

les points de rencontre de la quartique avec l'axe des y ont des ordonnées (13) telles que

$$y_3 > y_1 > y_2 .$$

Si g_3 est positif (fig. 2), on trouve de la même façon:

$$y_1 > y_3 > y_2 .$$

Enfin, si g_3 est nul (fig. 3), les racines e_1, e_3 sont égales et de signes contraires; on a:

$$y_1 = y_3 > y_2 ;$$

la courbe possède un contact avec elle-même.

La quartique unipartite ($\Delta < 0$) ne rencontre l'axe des ordonnées qu'en un seul point réel pour lequel on a:

$$pu = p_2 = e_2 .$$

16. Les points où l'axe des x coupe la quartique dépendent de l'équation

$$y = p''u = 0 ,$$

dont la théorie est classique (H., pp. 106–109).

Dans le cas du discriminant positif, cette équation fournit toujours un, mais un seul système de valeurs de pu, $p'u$, simultanément réelles (H., p. 107):

$$pu = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}} < 0 .$$

La courbe bipartite rencontre donc l'axe des x en deux points réels situés sur l'ovale, puisque pu prend une valeur négative (fig. 1, 2, 3).

Dans le cas du discriminant négatif, un très grand nombre d'éventualités se présentent. Nous nous contenterons ici d'examiner celles où l'on a: $g_3 < 0$; alors les points doubles sont réels.

Si g_2 est positif, la quartique est bicrunodale et rencontre l'axe des x en quatre points réels et distincts (fig. 4); mais si g_2 est négatif — ce qui ne peut jamais avoir lieu dans le cas d'un discriminant positif — la quartique est biacnodale (fig. 6) et ne rencontre l'axe des x en aucun point réel (H., p. 109); si g_2 est nul (fig. 9), la quartique est bicuspidale, et rencontre l'axe des x en ses deux points doubles.

17. Aux figures nous avons joint un tableau renfermant l'énumération de tous les cas possibles: il y en a treize. Les numéros de la dernière colonne correspondent aux figures.

Sur ces figures, nous avons indiqué par $+$ ou par $-$ le signe de la valeur réelle de pu. Ces différents signes peuvent se déterminer par le moyen de la formule (18).

Les trois dernières figures représentent des quartiques unicursales; elles correspondent à la dégénérescence des fonctions elliptiques.

18. Les relations (3) du début de notre article constituent les deux conditions nécessaires et suffisantes pour que quatre points de la quartique soient collinéaires. On a coupé cette courbe par la droite

$$A + Bx + Cy = 0 .$$

Ce qui complique beaucoup la théorie de la quartique binodale, et du reste la théorie de la quartique générale, relativement à celle de la cubique plane, c'est précisément ce fait qu'entre les paramètres déterminateurs de quatre points collinéaires, il doit exister deux relations différentes.

Le premier problème que nous avons résolu [3] peut s'énoncer comme il suit: on joint deux points de la courbe et l'on se propose de déterminer les deux autres points où la droite obtenue rencontre la quartique.

§ 4. — *Les deux tangentiels d'un point de la courbe.*

19. La tangente en un point u de la quartique rencontre la courbe en deux autres points (v, w) que nous-même avons