

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 23 (1923)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** FONCTIONS ELLIPTIQUES ET QUARTIQUES BINODALES 1  
**Autor:** Winants, Marcel  
**Kapitel:** §3. — Les deux cas suivant le signe du discriminant.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-19735>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

mais il est impossible qu'on ait  $pu = p\varphi$ , car cette égalité combinée à la première équation (20) conduirait à  $u \equiv \varphi$ , et nous venons de dire que cela ne devait pas être. Donc:

$$pu = -p\varphi.$$

La première équation (20) devient alors:

$$4p^3u - g_2 \cdot pu = 4p^3\varphi - g_2 \cdot p\varphi = - (4p^3u - g_2 \cdot pu) = 0,$$

ou

$$pu(4p^2u - g_2) = 0.$$

L'hypothèse  $pu = 0$  aurait pour conséquence  $pu = p\varphi$ ; elle est donc à rejeter. Il reste:

$$4p^2u - g_2 = 0,$$

c'est-à-dire:

$$pu = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-g_2} = -p\varphi. \quad (21)$$

Les équations (12) donnent alors:

$$x = \pm \sqrt{-g_3}, \quad y = g_2,$$

et, de cette manière, nous retrouvons bien les formules (16).

Si l'invariant  $g_2$  est négatif, la quartique est biacnodale [9], et nous voyons qu'en des points doubles isolés,  $pu$  prend effectivement des valeurs imaginaires. Plus haut [9], nous avons énoncé déjà la réciproque de cette dernière proposition.

Si  $g_2 = 0$ , les deux valeurs (21) que  $pu$  prend en chaque point double se confondent, et ces points sont donc des rebroussements [11].

De la relation  $pu = -p\varphi$  combinée à la formule (18) résulte cette propriété qu'en chacun des points doubles les deux tangentes ont des directions symétriques par rapport aux axes coordonnés.

### § 3. — *Les deux cas suivant le signe du discriminant.*

13. Après toutes les considérations générales qui précèdent, nous allons distinguer deux cas principaux suivant que le discriminant

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$$

est positif ou négatif. Toutes les notations que nous emploierons sont empruntées au premier volume du *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, de HALPHEN, auquel nous renverrons quelquefois.

14. Ainsi que nous en avons fait plus haut, la remarque les deux fonctions  $pu$ ,  $p'u$  sont réelles tout le long de la courbe, sauf aux points doubles isolés [9, 12].

Dans le cas du discriminant positif,  $pu$  devra donc satisfaire à l'une des relations:

$$\Delta > 0 : e_3 \leqslant pu \leqslant e_2 , \quad \text{ou} \quad pu \geqslant e_1 ; \quad (22)$$

et, dans le cas contraire:

$$\Delta < 0 : pu \geqslant e_2 . \quad (23)$$

De (22) nous conclurons que la quartique est bipartite: sur l'une des deux parties,  $pu$  varie entre les deux plus petites racines et conserve par conséquent une valeur toujours finie; des formules (13) il résulte que les coordonnées  $x$ ,  $y$  correspondantes sont également finies: nous obtiendrons donc un ovale fermé; sur l'autre partie  $pu$  sera égale ou supérieure à la plus grande racine  $e_1$  et pourra croître au-delà de toute limite: nous aurons une branche infinie sur laquelle  $pu$  ne pourra prendre que des valeurs positives, puisque

$$pu \geqslant e_1 > 0 .$$

Comme aux points doubles (21), nous avons:

$$pu = \pm \frac{1}{2} \sqrt{g_2} ,$$

nous voyons que l'ovale passe aux points doubles.

De (23) il résulte au contraire que, dans le cas d'un discriminant négatif, la quartique étudiée est unipartite.

15. Les points de rencontre de la courbe avec l'axe des  $y$  sont déterminés par l'équation.

$$x = p'u = 0 .$$

La quartique bipartite ( $\Delta > 0$ ) rencontre l'axe des  $y$  en trois points réels pour lesquels on a:

$$p_1 = e_1 , \quad p_2 = e_2 , \quad p_3 = e_3 ;$$

le premier de ces points se trouve sur la branche infinie ( $pu \geq e_1$ ); tandis que les deux autres appartiennent à l'ovale.

Si  $g_3$  est négatif (fig. 1), les racines  $e_1, e_2$  sont positives, tandis que  $e_3$  est négative; on a donc:

$$|e_3| > e_1 > e_2 ;$$

les points de rencontre de la quartique avec l'axe des  $y$  ont des ordonnées (13) telles que

$$\gamma_3 > \gamma_1 > \gamma_2 .$$

Si  $g_3$  est positif (fig. 2), on trouve de la même façon:

$$\gamma_1 > \gamma_3 > \gamma_2 .$$

Enfin, si  $g_3$  est nul (fig. 3), les racines  $e_1, e_3$  sont égales et de signes contraires; on a:

$$\gamma_1 = \gamma_3 > \gamma_2 ;$$

la courbe possède un contact avec elle-même.

La quartique unipartite ( $\Delta < 0$ ) ne rencontre l'axe des ordonnées qu'en un seul point réel pour lequel on a:

$$pu = p_2 = e_2 .$$

16. Les points où l'axe des  $x$  coupe la quartique dépendent de l'équation

$$\gamma = p''u = 0 ,$$

dont la théorie est classique (H., pp. 106-109).

Dans le cas du discriminant positif, cette équation fournit toujours un, mais un seul système de valeurs de  $pu, p'u$ , simultanément réelles (H., p. 107):

$$pu = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{g_2}{3}} < 0 .$$

La courbe bipartite rencontre donc l'axe des  $x$  en deux points réels situés sur l'ovale, puisque  $pu$  prend une valeur négative (fig. 1, 2, 3).

Dans le cas du discriminant négatif, un très grand nombre d'éventualités se présentent. Nous nous contenterons ici d'exe-

miner celles où l'on a:  $g_3 < 0$ ; alors les points doubles sont réels.

Si  $g_2$  est positif, la quartique est bicrunodale et rencontre l'axe des  $x$  en quatre points réels et distincts (fig. 4); mais si  $g_2$  est négatif — ce qui ne peut jamais avoir lieu dans le cas d'un discriminant positif — la quartique est biacnodale (fig. 6) et ne rencontre l'axe des  $x$  en aucun point réel (H., p. 109); si  $g_2$  est nul (fig. 9), la quartique est bicuspidale, et rencontre l'axe des  $x$  en ses deux points doubles.

17. Aux figures nous avons joint un tableau renfermant l'énumération de tous les cas possibles: il y en a treize. Les numéros de la dernière colonne correspondent aux figures.

Sur ces figures, nous avons indiqué par + ou par — le signe de la valeur réelle de  $pu$ . Ces différents signes peuvent se déterminer par le moyen de la formule (18).

Les trois dernières figures représentent des quartiques unicursales; elles correspondent à la dégénérescence des fonctions elliptiques.

18. Les relations (3) du début de notre article constituent les deux conditions nécessaires et suffisantes pour que quatre points de la quartique soient collinéaires. On a coupé cette courbe par la droite

$$A + Bx + Cy = 0.$$

Ce qui complique beaucoup la théorie de la quartique binoiale, et du reste la théorie de la quartique générale, relativement à celle de la cubique plane, c'est précisément ce fait qu'entre les paramètres déterminateurs de quatre points collinéaires, il doit exister deux relations différentes.

Le premier problème que nous avons résolu [3] peut s'énoncer comme il suit: on joint deux points de la courbe et l'on se propose de déterminer les deux autres points où la droite obtenue rencontre la quartique.

#### § 4. — *Les deux tangentiels d'un point de la courbe.*

19. La tangente en un point  $u$  de la quartique rencontre la courbe en deux autres points ( $\varphi, \omega$ ) que nous-mêmes avons