Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 23 (1923)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FONCTIONS ELLIPTIQUES ET QUARTIQUES BINODALES 1

Autor: Winants, Marcel

Kapitel: §1. — Etude de l'équation A + B.p'u + C.p"u = 0.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19735

général nous en feront évidemment un grief; notre justification nous sera fournie par feu Pierre Boutroux; dans *L'idéal scientifique des mathématiciens*, Paris, 1920, p. 259, ce savant historien nous a fait comprendre tout l'avantage qui peut résulter pour une théorie générale de l'examen préalable d'un cas très particulier.

§ 1. — *Etude de l'équation* $A + B \, . \, p'u + C \, . \, p''u = 0$.

1. Dans ce premier paragraphe nous envisagerons des fonctions elliptiques tout à fait quelconques : leurs invariants peuvent donc être imaginaires.

Dans l'équation proposée les coefficients A, B, C sont des constantes auxquelles on donnera n'importe quelles valeurs : leurs rapports mutuels constituent deux paramètres dont nous allons disposer dans un instant.

2. Le premier membre de notre équation admet un pôle quadruple $u = 0$. Dans un parallélogramme des périodes il y a donc quatre racines dont la somme est congrue à *zéro :*

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 0 \, . \tag{1}$$

Si l'on écrit que chacune de ces racines vérifie l'équation

$$A + B \, . \, p'u + C \, . \, p''u = 0 \, , \tag{2}$$

puis qu'entre les relations identiques trouvées ainsi l'on élimine A, B, C, on obtient :

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ p'u_1 & p'u_2 & p'u_3 & p'u_4 \\ p''u_1 & p''u_2 & p''u_3 & p''u_4 \end{matrix} \right\| = 0 \, , \tag{3}$$

et cela nous fournit, entre les quatre racines, deux relations indépendantes des coefficients.

Il est d'ailleurs évident qu'étant donnés quatre arguments différents, tels que deux quelconques d'entre eux ne soient pas homologues, il est à la fois nécessaire et suffisant qu'ils satisfassent aux deux conditions (3) pour qu'on puisse les considérer comme racines d'une certaine équation (2)

3. Nous allons disposer des deux paramètres signalés plus haut [1] de façon que l'équation (2) admette comme racines deux arguments u_1, u_2, arbitrairement choisis. Et nous allons rechercher les deux autres racines v, w. Elles sont déterminées par l'équation (3) qui peut s'écrire comme il suit :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p'u_1 & p'u_2 & p'v \\ p''u_1 & p''u_2 & p''v \end{vmatrix} = 0 \,. \tag{4}$$

Nous nous proposons de résoudre cette dernière équation.

On développe le déterminant (4) suivant les éléments de la troisième colonne et l'on remplace chaque fonction p'' par $6p^2 - \frac{1}{2} g_2$. On trouve:

$$\left(p_1^2 - p_2^2\right) \cdot p'v = \left(p_1' - p_2'\right) \cdot p^2 v + p_1^2 \cdot p_2' - p_2^2 \cdot p_1' \,, \tag{5}$$

où l'on a posé :

$$p_1 = pu_1 \,, \quad \dots \,, \quad p_2' = p'u_2 \,.$$

On élève au carré pour faire disparaître $p'v$, puis on ordonne:

$$\begin{gathered} \left(p_1' - p'\right)^2 \cdot p^4 v - 4\left(p_1^2 - p_2^2\right)^2 \cdot p^3 v \\ + 2\left(p_1' - p_2'\right)\left(p_1^2 \cdot p_2' - p_2^2 \cdot p_1'\right) \cdot p^2 v + g_2\left(p_1^2 - p_2^2\right)^2 \cdot pv \\ + p_1^4 \cdot \left(4p_2^3 - g_2 \cdot p_2\right) + p_2^4 \cdot \left(4p_1^3 - g_2 \cdot p_1\right) - 2p_1^2 \cdot p_2^2\left(p_1' \cdot p_2' + g_3\right) = 0 \,. \end{gathered}$$

Le premier membre de cette équation sera divisé par

$$(pv - p_1)(pv - p_2) = p^2 v - (p_1 + p_2) \cdot pv + p_1 \cdot p_2 \,.$$

Si l'on se reporte à l'équation (4), on verra que la division doit être effectivement possible. L'ayant faite, voici le quotient que l'on obtient :

$$\begin{gathered} \left(p_1' - p_2'\right)^2 \cdot p^2 v + \left(8p_1^2 \cdot p_2^2 + p_1 \cdot p_2'^2 + p_2 \cdot p_1'^2 - g_2 \cdot p_1^2 - g_2 \cdot p_2^2\right. \\ \left. - g_3 \cdot p_1 - g_3 \cdot p_2 - 2p_1 \cdot p_1' \cdot p_2' - 2p_2 \cdot p_1' \cdot p_2'\right) \cdot pv \\ + 4p_1^3 \cdot p_2^2 + 4p_1^2 \cdot p_2^3 - g_2 \cdot p_1^3 - g_2 \cdot p_2^3 \\ - 2g_3 \cdot p_1 \cdot p_2 - 2p_1 \cdot p_2 \cdot p_1' \cdot p_2' = 0 \,. \end{gathered} \tag{6}$$

L'équation (6), du second degré par rapport à $p\nu$, admet comme racines les deux quantités.

$$p\nu \ , \quad p\omega \ ,$$

auxquelles l'équation (5) permet de faire correspondre

$$p'\nu \ , \quad p'\omega \ .$$

Le problème est ainsi résolu.

4. Ce qui précède prouve à l'évidence une proposition que nous avons avancée plus haut [2] : les deux conditions (3) sont à la fois nécessaires et suffisantes pour que l'on puisse considérer quatre arguments comme racines d'une équation de la forme envisagée (2).

5. Nous allons examiner la même équation d'un tout autre point de vue. Il existe, quels que soient les coefficients A, B, C, deux relations remarquables entre les fonctions p des quatre racines.

Mettons l'équation sous la forme suivante :

$$\mathrm{C} \, . \, p''u + \mathrm{A} = - \, \mathrm{B} \, . \, p'u \ .$$

Elevons au carré, exprimons p'' et p'^2 en fonction de p, puis ordonnons :

$$\begin{aligned} & 36\mathrm{C}^2 \, . \, p^4 - 4\mathrm{B}^2 \, . \, p^3 + 6\mathrm{C}(2\mathrm{A} - \mathrm{C} \, . \, g_2) \, . \, p^2 \\ & + \mathrm{B}^2 \, . \, g_2 \, . \, p + \mathrm{A}^2 - \mathrm{AC} \, . \, g_2 + \mathrm{B}^2 \, . \, g_3 + \frac{1}{4}\mathrm{C}^2 \, . \, g_2^2 = 0 \ . \end{aligned} \tag{7}$$

L'équation (7) fournit quatre valeurs de p à chacune desquelles on peut associer d'abord une valeur de p'', puis par l'intermédiaire de l'équation proposée une valeur de p', ce qui résout définitivement le problème.

6. Pour les racines algébriques p de l'équation (7), voici les fonctions symétriques fondamentales :

$$\left.\begin{aligned} \Sigma p_r &= \frac{1}{9} \cdot \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{C}^2} \ , \\ \Sigma p_r \cdot p_s &= \frac{1}{6}\left(2\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}} - g_2\right) \ , \\ \Sigma p_r \cdot p_s \cdot p_t &= - \frac{1}{36} g_2 \cdot \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{C}^2} \ , \\ p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 &= \frac{1}{36}\left(\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{C}^2} - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}} \cdot g_2 + \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{C}^2}\, g_3 + \frac{1}{4} g_2^2\right) . \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

En comparant la première et la troisième des relations (8), on obtient d'abord :

$$\Sigma p_r \cdot p_s \cdot p_t = - \frac{1}{4} g_2 \cdot \Sigma p_r ,$$

ce qui peut s'écrire :

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} \right) = - \frac{1}{4} g_2 \cdot (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) . \quad (9)$$

De la première et de la deuxième des relations (8), on tire ensuite $\frac{B^2}{C^2}$ et $\frac{A}{C}$ respectivement; on substitue dans la quatrième; après quelques simplifications très faciles, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} & 4 p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 - g_3 (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) , \\ = & (p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_4 + p_2 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_4 + p_3 \cdot p_4)^2 . \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Ces équations (9, 10) ne renfermant pas la fonction impaire p' ne sont évidemment pas suffisantes pour que quatre arguments u_1, u_2, u_3, u_4, vérifient une équation de la forme proposée.

§ 2. — *Une quartique particulière.*

7. A partir de ce deuxième paragraphe les invariants g_2, g_3, des fonctions elliptiques employées seront supposés réels. Nous aurons bientôt à tenir compte du signe du discriminant de ces fonctions :

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 . \quad (11)$$

Nous allons étudier la courbe plane définie en coordonnées rectangulaires par les équations paramétriques :

$$x = p'u , \qquad y = p''u . \quad (12)$$

De ces deux équations, il résulte d'abord qu'une valeur de l'argument u détermine un seul point de la courbe, et que réciproquement, les points multiples éventuels étant exceptés, à tout point de la courbe ne répond qu'un seul argument (à part les valeurs homologues, bien entendu).