Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 23 (1923)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FONCTIONS ELLIPTIQUES ET QUARTIQUES BINODALES 1
Autor: Winants, Marcel
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19735

FONCTIONS ELLIPTIQUES ET QUARTIQUES BINODALES[1]

PAR

Marcel WINANTS (Liége).

SOMMAIRE: Introduction. — Etude d'une certaine équation elliptique. — Une quartique particulière. — Les deux cas suivant le signe du discriminant. — Les deux tangentiels d'un point de la courbe. — Conclusion.

INTRODUCTION. — La théorie de la cubique plane non singulière constitue l'une des plus anciennes et des plus importantes applications de la théorie des fonctions elliptiques. Elle est en même temps d'une élégance rare et d'une grande simplicité.

Il serait intéressant d'approprier cet admirable instrument de calcul qu'est l'algorithme des fonctions elliptiques à la recherche des propriétés de la quartique plane à deux points doubles. Cette courbe appartient effectivement au genre UN, et son étude est certainement possible par la méthode que nous indiquons. Cette étude offrirait d'ailleurs le plus grand intérêt pour la géométrie descriptive, car on sait que la projection de l'intersection de deux quadriques sur un plan quelconque est ordinairement une quartique binodale.

Les équations paramétriques tout à fait générales se rapportant à la présente question, sont probablement très compliquées et du reste nous n'avons pu les découvrir. Il a donc fallu que nous nous contentions d'examiner un simple cas particulier; c'est celui-là même dont l'étude constitue l'objet de la Note actuelle.

Les mathématiciens pour lesquels *il n'y a de science que du*

---

[1] Ce mémoire est accompagné de 13 figures qui ont été reproduites hors texte sur 2 planches. — *Réd.*

général nous en feront évidemment un grief; notre justification nous sera fournie par feu Pierre Boutroux; dans *L'idéal scientifique des mathématiciens*, Paris, 1920, p. 259, ce savant historien nous a fait comprendre tout l'avantage qui peut résulter pour une théorie générale de l'examen préalable d'un cas très particulier.

§ 1. — *Etude de l'équation* $A + B \,.\, p'u + C \,.\, p''u = 0$.

1. Dans ce premier paragraphe nous envisagerons des fonctions elliptiques tout à fait quelconques : leurs invariants peuvent donc être imaginaires.

Dans l'équation proposée les coefficients A, B, C sont des constantes auxquelles on donnera n'importe quelles valeurs : leurs rapports mutuels constituent deux paramètres dont nous allons disposer dans un instant.

2. Le premier membre de notre équation admet un pôle quadruple $u = 0$. Dans un parallélogramme des périodes il y a donc quatre racines dont la somme est congrue à *zéro :*

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \equiv 0 \,. \tag{1}$$

Si l'on écrit que chacune de ces racines vérifie l'équation

$$A + B \,.\, p'u + C \,.\, p''u = 0 \,, \tag{2}$$

puis qu'entre les relations identiques trouvées ainsi l'on élimine A, B, C, on obtient :

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ p'u_1 & p'u_2 & p'u_3 & p'u_4 \\ p''u_1 & p''u_2 & p''u_3 & p''u_4 \end{Vmatrix} = 0 \,, \tag{3}$$

et cela nous fournit, entre les quatre racines, deux relations indépendantes des coefficients.

Il est d'ailleurs évident qu'étant donnés quatre arguments différents, tels que deux quelconques d'entre eux ne soient pas homologues, il est à la fois nécessaire et suffisant qu'ils satisfassent aux deux conditions (3) pour qu'on puisse les considérer comme racines d'une certaine équation (2)

3. Nous allons disposer des deux paramètres signalés plus haut [1] de façon que l'équation (2) admette comme racines deux arguments u_1, u_2, arbitrairement choisis. Et nous allons rechercher les deux autres racines v, w. Elles sont déterminées par l'équation (3) qui peut s'écrire comme il suit :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p'u_1 & p'u_2 & p'v \\ p''u_1 & p''u_2 & p''v \end{vmatrix} = 0 . \tag{4}$$

Nous nous proposons de résoudre cette dernière équation.

On développe le déterminant (4) suivant les éléments de la troisième colonne et l'on remplace chaque fonction p'' par $6p^2 - \frac{1}{2} g_2$. On trouve:

$$\left(p_1^2 - p_2^2\right) \cdot p'v = \left(p_1' - p_2'\right) \cdot p^2 v + p_1^2 \cdot p_2' - p_2^2 \cdot p_1' , \tag{5}$$

où l'on a posé :

$$p_1 = pu_1 , \quad \dots , \quad p_2' = p'u_2 .$$

On élève au carré pour faire disparaître $p'v$, puis on ordonne:

$$\begin{gathered} \left(p_1' - p'\right)^2 \cdot p^4 v - 4\left(p_1^2 - p_2^2\right)^2 \cdot p^3 v \\ + 2\left(p_1' - p_2'\right)\left(p_1^2 \cdot p_2' - p_2^2 \cdot p_1'\right) \cdot p^2 v + g_2\left(p_1^2 - p_2^2\right)^2 \cdot pv \\ + p_1^4 \cdot \left(4p_2^2 - g_2 \cdot p_2\right) + p_2^4 \cdot \left(4p_1^3 - g_2 \cdot p_1\right) - 2p_1^2 \cdot p_2^2\left(p_1' \cdot p_2' + g_3\right) = 0 . \end{gathered}$$

Le premier membre de cette équation sera divisé par

$$(pv - p_1)(pv - p_2) = p^2 v - (p_1 + p_2) \cdot pv + p_1 \cdot p_2 .$$

Si l'on se reporte à l'équation (4), on verra que la division doit être effectivement possible. L'ayant faite, voici le quotient que l'on obtient :

$$\begin{gathered} \left(p_1' - p_2'\right)^2 \cdot p^2 v + \left(8p_1^2 \cdot p_2^2 + p_1 \cdot p_2'^2 + p_2 \cdot p_1'^2 - g_2 \cdot p_1^2 - g_2 \cdot p_2^2\right. \\ \left. - g_3 \cdot p_1 - g_3 \cdot p_2 - 2p_1 \cdot p_1' \cdot p_2' - 2p_2 \cdot p_1' \cdot p_2'\right) \cdot pv \\ + 4p_1^3 \cdot p_2^2 + 4p_1^2 \cdot p_2^3 - g_2 \cdot p_1^3 - g_2 \cdot p_2^3 \\ - 2g_3 \cdot p_1 \cdot p_2 - 2p_1 \cdot p_2 \cdot p_1' \cdot p_2' = 0 . \end{gathered} \tag{6}$$

L'équation (6), du second degré par rapport à $p\nu$, admet comme racines les deux quantités.

$$p\nu \ , \quad p\omega \ ,$$

auxquelles l'équation (5) permet de faire correspondre

$$p'\nu \ , \quad p'\omega \ .$$

Le problème est ainsi résolu.

4. Ce qui précède prouve à l'évidence une proposition que nous avons avancée plus haut [2] : les deux conditions (3) sont à la fois nécessaires et suffisantes pour que l'on puisse considérer quatre arguments comme racines d'une équation de la forme envisagée (2).

5. Nous allons examiner la même équation d'un tout autre point de vue. Il existe, quels que soient les coefficients A, B, C, deux relations remarquables entre les fonctions p des quatre racines.

Mettons l'équation sous la forme suivante :

$$\mathrm{C} \cdot p''u + \mathrm{A} = - \mathrm{B} \cdot p'u \ .$$

Elevons au carré, exprimons p'' et p'^2 en fonction de p, puis ordonnons :

$$\begin{aligned} &36\mathrm{C}^2 \cdot p^4 - 4\mathrm{B}^2 \cdot p^3 + 6\mathrm{C}(2\mathrm{A} - \mathrm{C} \cdot g_2) \cdot p^2 \\ &+ \mathrm{B}^2 \cdot g_2 \cdot p + \mathrm{A}^2 - \mathrm{AC} \cdot g_2 + \mathrm{B}^2 \cdot g_3 + \frac{1}{4} \mathrm{C}^2 \cdot g_2^2 = 0 \ . \end{aligned} \tag{7}$$

L'équation (7) fournit quatre valeurs de p à chacune desquelles on peut associer d'abord une valeur de p'', puis par l'intermédiaire de l'équation proposée une valeur de p', ce qui résout définitivement le problème.

6. Pour les racines algébriques p de l'équation (7), voici les fonctions symétriques fondamentales :

$$\left.\begin{aligned} \Sigma p_r &= \frac{1}{9} \cdot \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{C}^2} \ , \\ \Sigma p_r \cdot p_s &= \frac{1}{6}\left(2\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}} - g_2\right) \ , \\ \Sigma p_r \cdot p_s \cdot p_t &= -\frac{1}{36} g_2 \cdot \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{C}^2} \ , \\ p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 &= \frac{1}{36}\left(\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{C}^2} - \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{C}} \cdot g_2 + \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{C}^2} g_3 + \frac{1}{4} g_2^2\right) . \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

En comparant la première et la troisième des relations (8), on obtient d'abord :

$$\Sigma p_r \cdot p_s \cdot p_t = -\frac{1}{4} g_2 \cdot \Sigma p_r ,$$

ce qui peut s'écrire :

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4}\right) = -\frac{1}{4} g_2 \cdot (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) . \qquad (9)$$

De la première et de la deuxième des relations (8), on tire ensuite $\frac{B^2}{C^2}$ et $\frac{A}{C}$ respectivement; on substitue dans la quatrième; après quelques simplifications très faciles, on obtient :

$$\left.\begin{aligned} &4p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 - g_3(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \\ &= (p_1 \cdot p_2 + p_1 \cdot p_3 + p_1 \cdot p_4 + p_2 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_4 + p_3 \cdot p_4)^2 . \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Ces équations (9, 10) ne renfermant pas la fonction impaire p' ne sont évidemment pas suffisantes pour que quatre arguments u_1, u_2, u_3, u_4, vérifient une équation de la forme proposée.

§ 2. — *Une quartique particulière.*

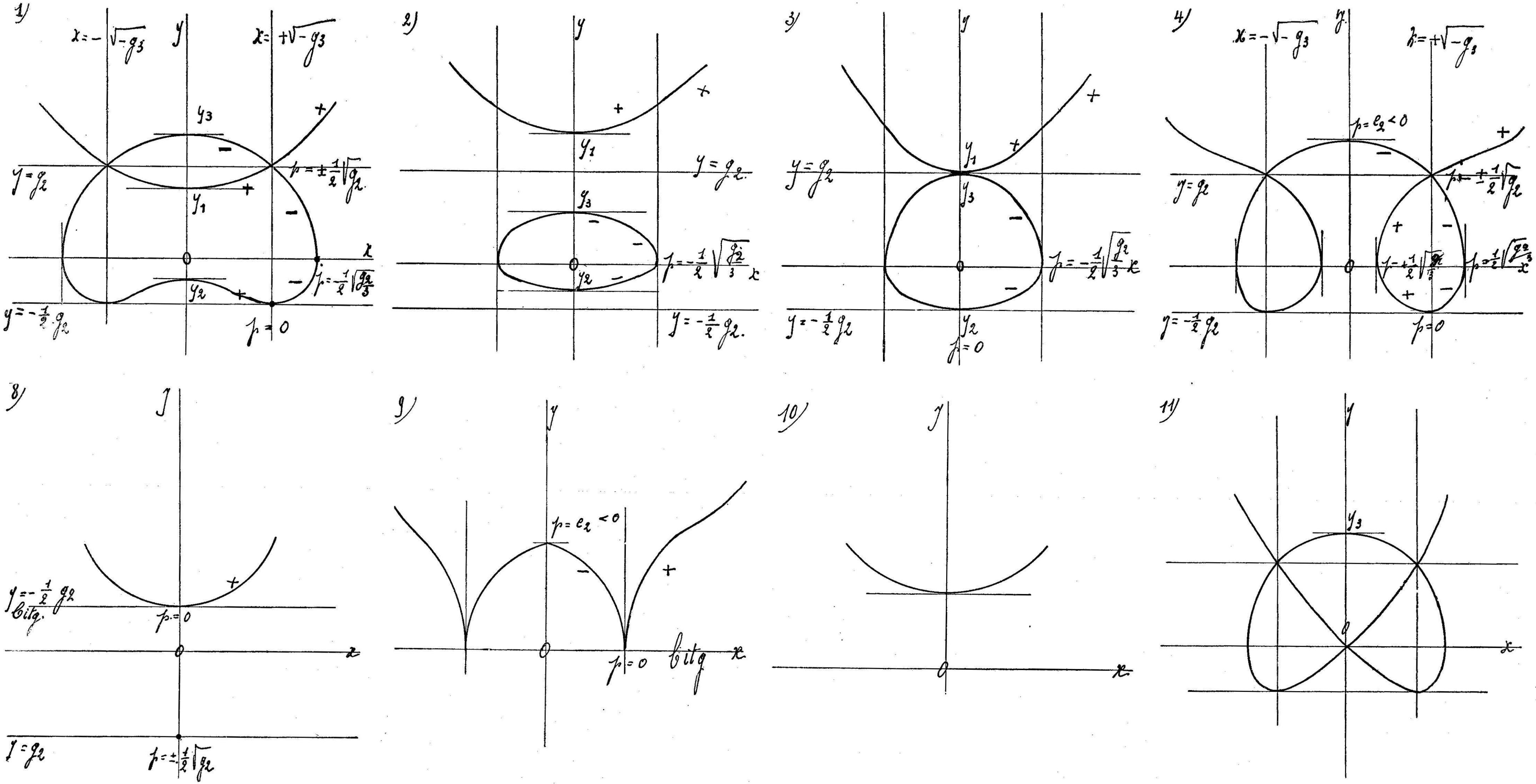
7. A partir de ce deuxième paragraphe les invariants g_2, g_3, des fonctions elliptiques employées seront supposés réels. Nous aurons bientôt à tenir compte du signe du discriminant de ces fonctions :

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 . \qquad (11)$$

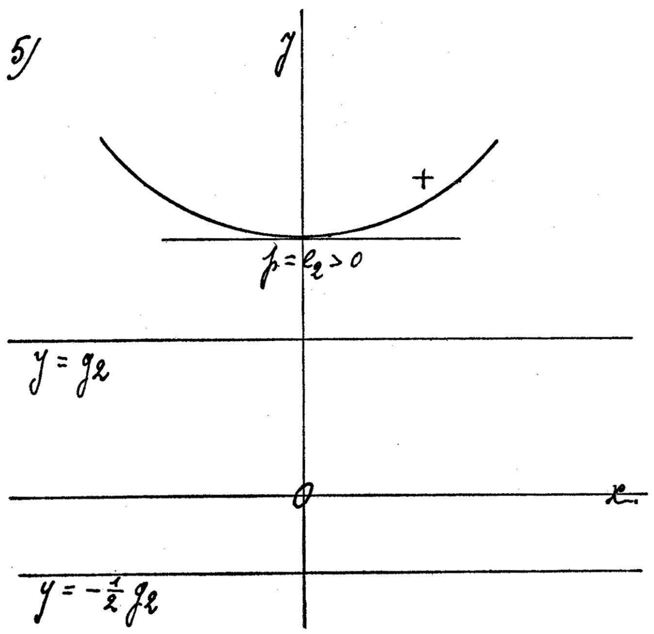
Nous allons étudier la courbe plane définie en coordonnées rectangulaires par les équations paramétriques :

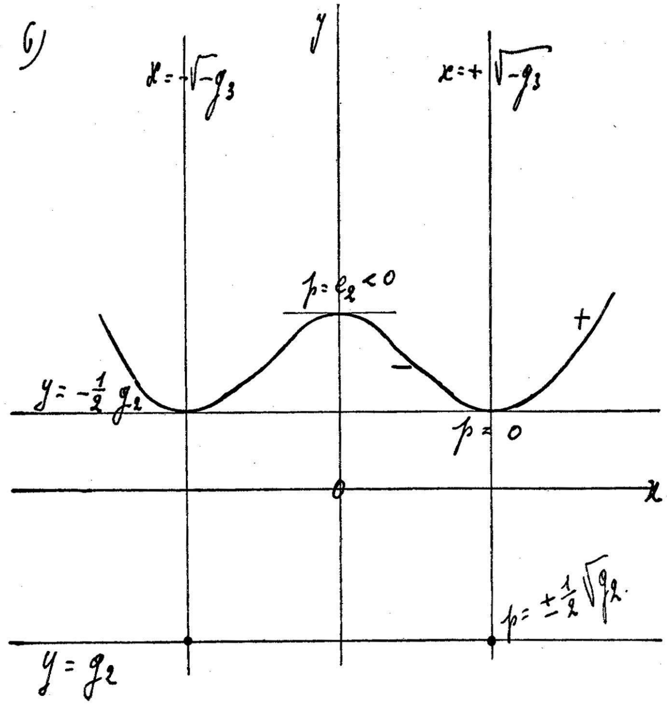
$$x = p'u , \qquad y = p''u . \qquad (12)$$

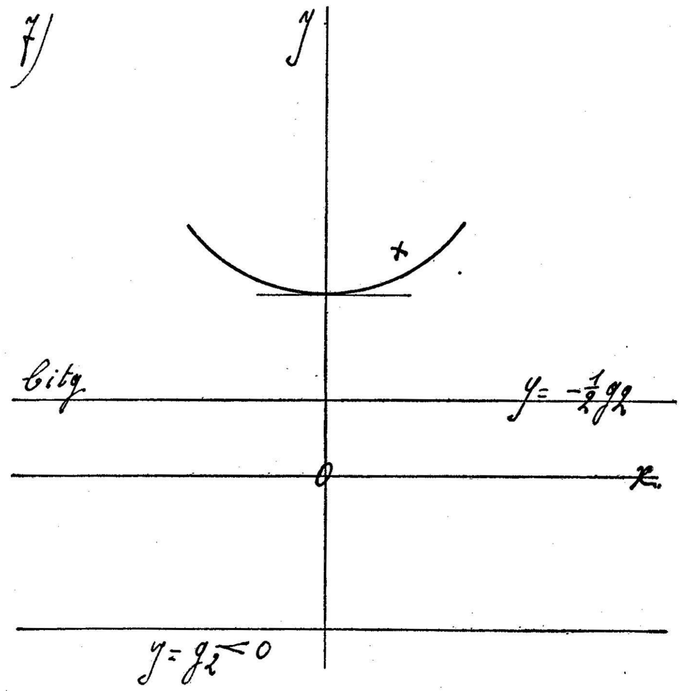
De ces deux équations, il résulte d'abord qu'une valeur de l'argument u détermine un seul point de la courbe, et que réciproquement, les points multiples éventuels étant exceptés, à tout point de la courbe ne répond qu'un seul argument (à part les valeurs homologues, bien entendu).

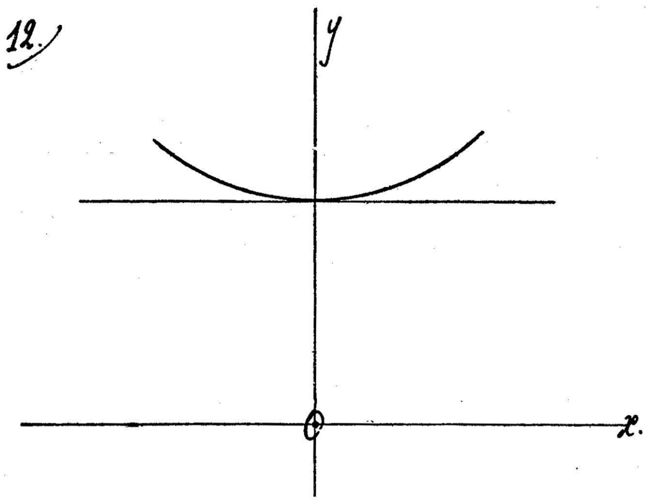

1)
x = −√−g₃
x = +√−g₃
y = g₂
y₃
y₁
y₂
p = ± ½ √g₂
y = −½ g₂
p = 0
2)
y = g₂
y = −½ g₂
3)
y = g₂
y = −½ g₂
p = 0
4)
x = −√−g₃
x = +√−g₃
p = e₂ < 0
y = g₂
y = −½ g₂
p = 0
8)
y = −½ g₂
p = 0
y = g₂
p = ± ½ √g₂
9)
p = e₂ < 0
p = 0
10)
11)
y₃

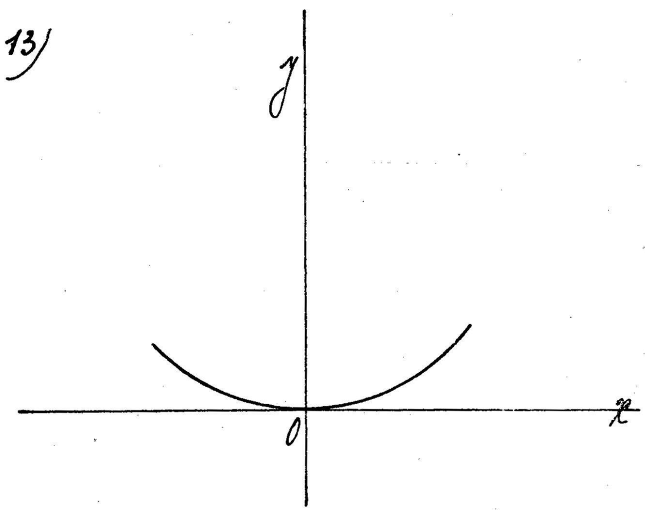
vide-leer-empty











$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$

- $\Delta > 0 \rightarrow g_2 > 0$
  - $g_3 < 0$ — 1
  - $g_3 > 0$ — 2
  - $g_3 = 0$ — 3
- $\Delta < 0$
  - $g_2 > 0 \rightarrow g_3 \neq 0$
    - $g_3 < 0$ — 4
    - $g_3 > 0$ — 5
  - $g_2 < 0$
    - $g_3 < 0$ — 6
    - $g_3 > 0$ — 7
    - $g_3 = 0$ — 8
  - $g_2 = 0 \rightarrow g_3 \neq 0$
    - $g_3 < 0$ — 9
    - $g_3 > 0$ — 10
- $\Delta = 0 \rightarrow g_2 \gtreqless 0$
  - $e_1 = e_2 > e_3$ — 11
  - $e_1 > e_2 = e_3$ — 12
  - $e_1 = e_2 = e_3$ — 13

Les équations (12) peuvent s'écrire :

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= 4p^3 - g_2 \cdot p - g_3 , \\ y &= 6p^2 - \frac{1}{2} g_2 , \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

d'où l'on déduit directement :

$$2y \cdot p - 3x^2 = 2g_2 \cdot p + 3g_3 ,$$

puis

$$pu = p = \frac{3(x^2 + g_3)}{2(y - g_2)} . \qquad (14)$$

On transporte cette valeur dans la seconde des équations (13) et l'on obtient par des calculs faciles

$$(2y + g_2) \cdot (y - g_2)^2 = 27 \cdot (x^2 + g_3)^2 . \qquad (15)$$

8. La courbe envisagée est donc une quartique binodale, ayant les deux points doubles :

$$y = g_2 , \qquad x = \pm \sqrt{- g_3} . \qquad (16)$$

Ces deux points doubles sont imaginaires ou réels suivant que l'invariant g_3 est positif ou négatif.

Quand le discriminant (11) s'évanouit, l'équation (15) montre que l'origine des coordonnées est un troisième point double, et la courbe est alors unicursale.

9. De l'équation cartésienne (15) ou des équations paramétriques (12) résulte la symétrie de notre quartique par rapport à l'axe des y. Semblablement, on aperçoit l'existence d'une direction asymptotique quadruple parallèle au même axe des y.

De la formule (14) on déduit aisément que la fonction pu reste réelle tout le long de la courbe, sauf peut-être aux points doubles, pour lesquels pu prend une valeur indéterminée, ainsi que l'égalité (14) et les relations (16) le rendent manifeste. Si pu devient effectivement imaginaire en un point double, celui-ci doit être un point isolé; car en tout point de la courbe, infiniment voisin d'un point crunodal ou cuspidal, la quantité pu prend une valeur réelle.

De la deuxième des formules (13), il résulte alors que l'ordonnée y admet le minimum $-\frac{1}{2}g_2$ corrrespondant à l'annulation de p.

De l'équation (15), on déduit encore l'existence d'une bitangente $\left(y = -\frac{1}{2}g_2\right)$ dont les points de contact ont mêmes abcisses ($\pm\sqrt{-g_3}$) que les points doubles. Voyez les formules (16).

De tout ce que l'on vient de développer on conclut que la courbe est située tout entière au dessus de sa bitangente, sauf qu'il se pourrait qu'il y eût exception pour des points doubles isolés.

Et c'est ce qui se passe effectivement quand l'invariant g_2 est négatif, puisque alors, en vertu de (16), l'ordonnée g_2 des points doubles est inférieure au minimum $-\frac{1}{2}g_2$ de y. L'hypothèse $g_2 < 0$ conduit en conséquence à des courbes acnodales (fig. 6, 7, 8).

10. Des équations paramétriques (12) on tire cette relation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p'''u}{p''u} = \frac{12pu \cdot p'u}{p''u}, \tag{17}$$

qui peut s'écrire :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12pu \cdot x}{y}. \tag{18}$$

Donc en tout point où la courbe rencontre l'un des axes coordonnés, la tangente est parallèle à l'autre axe.

Aux points où la quartique touche sa bitangente

$$\left(y = -\frac{1}{2}g_2, \quad \text{donc} \quad p = 0\right),$$

la tangente, qui est précisément cette bitangente elle-même, est parallèle à l'axe des x.

11. Pour déterminer la classe de la courbe, essayons de lui mener une tangente par un point quelconque (α, β) de son plan. Les arguments afférents aux points de contact seront les racines de l'équation

$$\beta - p''u = \frac{12pu \cdot p'u}{p''u} \cdot (\alpha - p'u),$$

qui résulte des formules (12, 17) et qui peut s'écrire :

$$(\beta - p''u) . p''u + 12pu . p'^2u = 12\alpha . pu . p'u . \qquad (19)$$

On élève au carré, ce qui fournit visiblement une équation du huitième degré en pu. A chacune des racines de cette équation correspond, en vertu de (19), une et une seule valeur de $p'u$, puisque le premier membre de cette équation (19) est rationnel par rapport à pu.

La quartique envisagée est donc de *huitième classe*, ce qui doit être, d'ailleurs, d'après la théorie des caractéristiques plückériennes.

Et d'autre part cette propriété n'est qu'un simple cas particulier d'une proposition très générale: quand pour une certaine courbe les coordonnées ponctuelles sont exprimables en fonctions elliptiques d'un même argument, la classe de cette courbe est toujours double de son ordre. (Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, deuxième volume, p. 415.)

Une restriction s'impose pourtant. Si l'invariant g_2 s'annule, la dérivée $p''u$ devient égale à $6p^2u$, et les deux membres de l'équation (19) sont divisibles par pu. L'équation finale admettra donc la racine double: $p^2u = 0$. Les points de contact de la courbe avec sa bitangente sont alors des points de rebroussement, la quartique est bicuspidale, et sa classe tombe au nombre *six*. Et la formule (18) montre bien qu'en supposant à la fois $pu = 0$, $y = 0$, on rend indéterminé le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$.

L'hypothèse $g_2 = 0$ conduit en conséquence à des courbes cuspidales (fig. 9, 10).

12. Pour en finir avec les généralités, nous allons procéder à la recherche directe des points doubles [7, 8].

Un point double étant un point par lequel la courbe passe deux fois, il faut qu'on ait

$$p'u = p'v , \quad p''u = p''v , \qquad (20)$$

sans que les arguments u, v soient homologues. La seconde équation entraîne

$$p^2u = p^2v ;$$

mais il est impossible qu'on ait $pu = pv$, car cette égalité combinée à la première équation (20) conduirait à $u \equiv v$, et nous venons de dire que cela ne devait pas être. Donc:

$$pu = - pv .$$

La première équation (20) devient alors:

$$4p^3 u - g_2 \cdot pu = 4p^3 v - g_2 \cdot pv = - (4p^3 u - g_2 \cdot pu) = 0 ,$$

ou

$$pu (4p^2 u - g_2) = 0 .$$

L'hypothèse $pu = 0$ aurait pour conséquence $pu = pv$; elle est donc à rejeter. Il reste:

$$4p^2 u - g_2 = 0 ,$$

c'est-à-dire:

$$pu = \pm \frac{1}{2} \sqrt{g_2} = - pv . \qquad (21)$$

Les équations (12) donnent alors:

$$x = \pm \sqrt{- g_3} , \quad y = g_2 ,$$

et, de cette manière, nous retrouvons bien les formules (16).

Si l'invariant g_2 est négatif, la quartique est biacnodale [9], et nous voyons qu'en des points doubles isolés, pu prend effectivement des valeurs imaginaires. Plus haut [9], nous avons énoncé déjà la réciproque de cette dernière proposition.

Si $g_2 = 0$, les deux valeurs (21) que pu prend en chaque point double se confondent, et ces points sont donc des rebroussements [11].

De la relation $pu = - pv$ combinée à la formule (18) résulte cette propriété qu'en chacun des points doubles les deux tangentes ont des directions symétriques par rapport aux axes coordonnés.

§ 3. — *Les deux cas suivant le signe du discriminant.*

13. Après toutes les considérations générales qui précèdent, nous allons distinguer deux cas principaux suivant que le discriminant

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$$

est positif ou négatif. Toutes les notations que nous emploierons sont empruntées au premier volume du *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, de HALPHEN, auquel nous renverrons quelquefois.

14. Ainsi que nous en avons fait plus haut, la remarque les deux fonctions pu, $p'u$ sont réelles tout le long de la courbe, sauf aux points doubles isolés [9, 12].

Dans le cas du discriminant positif, pu devra donc satisfaire à l'une des relations:

$$\Delta > 0 : e_3 \leqq pu \leqq e_2 \,, \qquad \text{ou} \qquad pu \geqq e_1 \;; \tag{22}$$

et, dans le cas contraire:

$$\Delta < 0 : pu \geqq e_2 \,. \tag{23}$$

De (22) nous conclurons que la quartique est bipartite: sur l'une des deux parties, pu varie entre les deux plus petites racines et conserve par conséquent une valeur toujours finie; des formules (13) il résulte que les coordonnées x, y correspondantes sont également finies: nous obtiendrons donc un ovale fermé; sur l'autre partie pu sera égale ou supérieure à la plus grande racine e_1 et pourra croître au-delà de toute limite: nous aurons une branche infinie sur laquelle pu ne pourra prendre que des valeurs positives, puisque

$$pu \geqq e_1 > 0 \,.$$

Comme aux points doubles (21), nous avons:

$$pu = \pm \frac{1}{2} \sqrt{g_2} \,,$$

nous voyons que l'ovale passe aux points doubles.

De (23) il résulte au contraire que, dans le cas d'un discriminant négatif, la quartique étudiée est unipartite.

15. Les points de rencontre de la courbe avec l'axe des y sont déterminés par l'équation.

$$x = p'u = 0 \,.$$

La quartique bipartite ($\Delta > 0$) rencontre l'axe des y en trois points réels pour lesquels on a:

$$p_1 = e_1 \,, \quad p_2 = e_2 \,, \quad p_3 = e_3 \;;$$

le premier de ces points se trouve sur la branche infinie ($pu \geqq e_1$); tandis que les deux autres appartiennent à l'ovale.

Si g_3 est négatif (fig. 1), les racines e_1, e_2 sont positives, tandis que e_3 est négative; on a donc:

$$|e_3| > e_1 > e_2 ;$$

les points de rencontre de la quartique avec l'axe des y ont des ordonnées (13) telles que

$$y_3 > y_1 > y_2 .$$

Si g_3 est positif (fig. 2), on trouve de la même façon:

$$y_1 > y_3 > y_2 .$$

Enfin, si g_3 est nul (fig. 3), les racines e_1, e_3 sont égales et de signes contraires; on a:

$$y_1 = y_3 > y_2 ;$$

la courbe possède un contact avec elle-même.

La quartique unipartite ($\Delta < 0$) ne rencontre l'axe des ordonnées qu'en un seul point réel pour lequel on a:

$$pu = p_2 = e_2 .$$

16. Les points où l'axe des x coupe la quartique dépendent de l'équation

$$y = p''u = 0 ,$$

dont la théorie est classique (H., pp. 106–109).

Dans le cas du discriminant positif, cette équation fournit toujours un, mais un seul système de valeurs de pu, $p'u$, simultanément réelles (H., p. 107):

$$pu = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g_2}{3}} < 0 .$$

La courbe bipartite rencontre donc l'axe des x en deux points réels situés sur l'ovale, puisque pu prend une valeur négative (fig. 1, 2, 3).

Dans le cas du discriminant négatif, un très grand nombre d'éventualités se présentent. Nous nous contenterons ici d'examiner celles où l'on a: $g_3 < 0$; alors les points doubles sont réels.

Si g_2 est positif, la quartique est bicrunodale et rencontre l'axe des x en quatre points réels et distincts (fig. 4); mais si g_2 est négatif — ce qui ne peut jamais avoir lieu dans le cas d'un discriminant positif — la quartique est biacnodale (fig. 6) et ne rencontre l'axe des x en aucun point réel (H., p. 109); si g_2 est nul (fig. 9), la quartique est bicuspidale, et rencontre l'axe des x en ses deux points doubles.

17. Aux figures nous avons joint un tableau renfermant l'énumération de tous les cas possibles: il y en a treize. Les numéros de la dernière colonne correspondent aux figures.

Sur ces figures, nous avons indiqué par $+$ ou par $-$ le signe de la valeur réelle de pu. Ces différents signes peuvent se déterminer par le moyen de la formule (18).

Les trois dernières figures représentent des quartiques unicursales; elles correspondent à la dégénérescence des fonctions elliptiques.

18. Les relations (3) du début de notre article constituent les deux conditions nécessaires et suffisantes pour que quatre points de la quartique soient collinéaires. On a coupé cette courbe par la droite

$$A + Bx + Cy = 0 .$$

Ce qui complique beaucoup la théorie de la quartique binodale, et du reste la théorie de la quartique générale, relativement à celle de la cubique plane, c'est précisément ce fait qu'entre les paramètres déterminateurs de quatre points collinéaires, il doit exister deux relations différentes.

Le premier problème que nous avons résolu [3] peut s'énoncer comme il suit: on joint deux points de la courbe et l'on se propose de déterminer les deux autres points où la droite obtenue rencontre la quartique.

§ 4. — *Les deux tangentiels d'un point de la courbe.*

19. La tangente en un point u de la quartique rencontre la courbe en deux autres points (v, w) que nous-même avons

appelés les *tangentiels* du point de contact. (Marcel WINANTS, *Interséquants et tangentiels*, Bulletins de la Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique, 3 mars 1923, pp. 107–115). Nous nous proposons de calculer v, w, connaissant u.

Ce problème peut être envisagé comme un cas limité de celui que nous signalions tout à la fin du paragraphe précédent.

L'hypothèse $u_1 = u_2 = u$ rend l'équation (6) indéterminée, mais on pourrait lever cette indétermination par le moyen de la règle de L'Hospital.

20. Cependant nous allons employer une tout autre méthode: nous égalerons les coefficients angulaires de la tangente en u et de la droite uv:

$$\frac{p'''u}{p''u} = \frac{p''v - p''u}{p'v - p'u} \,. \tag{24}$$

Cette équation en v admet comme racines les arguments inconnus v, w. Isolons $p'v$, puis élevons au carré; exprimons p'^2v et $p''v$ en fonction de pv. Faisons disparaître aussi p'^2u et $p''u$. On obtient finalement l'équation:

$$\begin{aligned} &\left(36p^4u - 6g_2 \cdot p^2u + \frac{1}{4}g_2^2\right) \cdot p^4v \\ &- (64p^5u - 16g_2 \cdot p^3u - 16g_3 \cdot p^2u) \cdot p^3v \\ &+ \left(24p^6u - 20g_2 \cdot p^4u - 24g_3 \cdot p^3u + \frac{3}{2}g_2^2 \cdot p^2u + 2g_2 \cdot g_3 \cdot pu\right) \cdot p^2v \\ &+ (16g_2 \cdot p^5u - 4g_2^2 \cdot p^3u - 4g_2 \cdot g_3 \cdot p^2u) \cdot pv \\ &+ 4p^8u - 6g_2 \cdot p^6u + 8g_3 \cdot p^5u + \frac{9}{4}g_2^2 \cdot p^4u + 2g_2 \cdot g_3 p^3u = 0 \,. \end{aligned}$$

Le premier membre de cette équation doit être divisible par

$$(pv - pu)^2 \;;$$

il l'est effectivement. Voici ce que l'on trouve pour quotient:

$$\begin{aligned} &\left(36p^4u - 6g_2 \cdot p^2u + \frac{1}{4}g_2^2\right) \cdot p^2v \\ &+ \left(8p^5u + 4g_2 \cdot p^3u + 16g_3 \cdot p^2u + \frac{1}{2}g_2^2 \cdot pu\right) \cdot pv \\ &+ 4p^6u - 6g_2 \cdot p^4u + 8g_3 \cdot p^3u + \frac{9}{4}g_2^2 \cdot p^2u + 2g_2 \cdot g_3 \cdot pu = 0 \,. \end{aligned} \tag{25}$$

Cette équation (25) est ce que deviendrait l'équation (6) si l'on y introduisait l'hypothèse $u_1 = u_2 = u$ et qu'on levât l'indétermination résultante en recourant à la règle de L'Hospital.

21. L'équation (25) fournit, pour pv, deux valeurs à chacune desquelles l'équation (24) fait correspondre une et une seule valeur de $p'v$.

Le problème de la détermination des tangentiels se trouve ainsi complètement résolu.

22. Pour qu'un certain point u soit un point d'inflexion, il faut que l'un de ses deux tangentiels coïncide avec lui. L'équation (25) en pv doit admettre la racine $pv = pu$. Remplaçons-y donc pv par pu, et nous obtenons une équation du sixième degré relativement à pu. Mais l'axe des y est un axe de symétrie. La quartique étudiée possède ainsi douze points inflexionnels, et c'est encore une fois conforme à la théorie des nombres de Plücker.

23. Soit u l'un des points de contact d'une bitangente. L'équation (25) en pv doit avoir ses deux racines égales, condition que l'on réalisera par l'annulation du discriminant de cette équation. Nous obtenons de la sorte une équation du dixième degré par rapport à pu.

Seulement les formules de Plücker *indiquent huit bitangentes et non pas dix. Ici nous nous trouvons en présence d'une difficulté que nous n'avons pas su résoudre. Nous serions particulièrement heureux si quelque lecteur de l'*Enseignement mathématique *pouvait nous apporter la clef de cette énigme.*

A titre de vérification nous ferons cependant observer que l'équation du dixième degré dont il vient d'être question, a son premier membre divisible par pu. Et nous savons bien [10] que l'égalité $pu = 0$ convient aux deux points de contact d'une certaine bitangente.

24. Une méthode absolument différente pourrait nous fournir les résultats obtenus aux deux numéros précédents. Il suffira que nous nous servions convenablement des formules (1, 9, 10). Les calculs sont malheureusement fort longs, et la discussion des résultats trouvés nous paraît très ardue. Aussi nous contenterons-nous de donner quelques indications sommaires relativement à cette nouvelle méthode.

Dans la formule (1) introduisons l'hypothèse

$$u_1 = u_2 = u \,, \qquad u_3 = u_4 = v \;;$$

il viendra:

$$2u \equiv -2v \,,$$

pour les deux contacts d'une bitangente, et par conséquent:

$$p2u = p2v \,,$$

ou (H., p. 95):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{p^4 u + \frac{1}{2} g_2 \cdot p^2 u + 2g_3 \cdot pu + \frac{1}{16} \cdot g_2^2}{4p^3 u - g_2 \cdot pu - g_3} \\ = &\frac{p^4 v + \frac{1}{2} g_2 \cdot p^2 v + 2g_3 \cdot pv + \frac{1}{16} \cdot g_2^2}{4p^3 v - g_2 \cdot pv - g_3} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

La relation (9) devient de même:

$$(pu + pv)\left(pu \cdot pv + \frac{1}{4} g_2\right) = 0 \,,$$

et se décompose en deux autres:

$$pv = -pu \,, \quad \text{ou} \quad pv = -\frac{g_2}{4pu} \,. \tag{27}$$

On transporte chacune de ces valeurs de pv, soit dans l'équation (10) modifiée par l'hypthèse actuelle, soit dans l'équation (26). Les calculs sont extraordinairement compliqués.

La fonction pu ne prend, le long de la courbe, que des valeurs réelles [9]; d'autre part, dans le cas d'un discriminant positif, l'invariant g_2 lui-même est nécessairement positif [16]; les formules (27) montrent alors que pour toute bitangente la fonction pu est nulle ou négative en l'un des points de contact; donc [14], dans le cas de la quartique bipartite, n'importe quelle bitangente réelle touche l'ovale au moins une fois (fig. 1, 2, 3).

25. Dans notre article *Interséquants et tangentiels* (loc. cit., p. 108), nous avons démontré que *si quatre points d'une quartique sont collinéaires, leurs huit tangentiels appartiennent à une même conique.* Nous aurions voulu déduire cette propriété, pour le cas particulier des quartiques binodales, de leur représentation para-

métrique au moyen des fonctions elliptiques. Malheureusement les calculs sont si extraordinairement laborieux qu'il nous faut y renoncer, pour le moment tout au moins.

Conclusion. — A part les quelques difficultés que nous avons signalées dans les trois derniers numéros, nous voyons toutes les propriétés importantes de la courbe découler, presque automatiquement, de la représentation paramétrique adoptée.

Mais en dehors de son intérêt possible pour la géométrie algébrique, le présent article pourrait être envisagé comme un simple exercice d'analyse: la représentation graphique de la relation qui lie entre elles, dans le domaine réel des applications, les deux premières dérivées de la fonction elliptique fondamentale.

Enfin nous avons interprété, sur un même dessin, les zéros de la fonction pu et de ses deux premières dérivées (et même de la troisième puisque l'on a: $p''' = 12\, p \,.\, p'$).

Liége (Université), le 5 novembre 1923.

SUR L'INTÉGRATION DE QUELQUES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU SECOND ORDRE

PAR

l'Abbé Lainé (Angers).

---

1. Considérons l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}{2} y'' + (ax + b)y' + \lambda y = 0 \,. \tag{1}$$

Pour simplifier, nous poserons

$$\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 2\mathrm{X} \,.$$

Dérivons n fois l'équation (1); nous aurons

$$\mathrm{X} y^{(n+2)} + [(a + n\alpha)x + b + n\beta] y^{(n+1)} + \left[na + \lambda + \frac{n(n-1)}{2}\alpha \right] y^{(n)} = 0 \,.$$