**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 23 (1923)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** QU'EST-CE QUE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ?

**Autor:** Loria, Gino

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-19734

traits de navigateurs ou tout au moins de spécialistes en questions nautiques. Et, comme l'aboutissement est le même dans les deux cas, on voit avec quelle force s'impose le concept purement mathématique, qu'on y soit primitivement conduit par les spéculations ou par des problèmes d'origine pratique.

D'après M. F. Gomes TEIXEIRA.
(Notes recueillies par M. A. BUHL.)

---

# QU'EST-CE QUE LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ?

PAR

Gino LORIA (Gênes).

---

1. — Les traités de géométrie analytique, à partir de l'excellent livre [1] où ce mot est employé pour la première fois pour désigner la méthode des coordonnées [2], comprennent d'ordinaire:

*a*) des généralités sur cette méthode;

*b*) quelques exemples sur la détermination des équations des lieux et quelques autres relatifs au tracé de courbes dont on connaît l'équation;

*c*) la détermination des formules qui servent à résoudre les questions fondamentales relatives aux points, aux droites et aux plans;

*d*) enfin l'étude et la classification des courbes et des surfaces du second degré.

Comme ce dernier sujet remplit la plus grande partie de chaque traité, ceux qui commencent se forment l'idée que le

[1] J.-B. BIOT, *Essai de géométrie analytique*. J'ai sous les yeux la V[e] éd., Paris 1813.

[2] Ce nom est évidemment inspiré par le titre de la *Mécanique analytique* de LAGRANGE; d'ailleurs ce grand géomètre suivait à son tour un exemple donné par Euler dans son traité *Mechanica, sive motus scientia analytice exposita*.

but suprême de la géométrie analytique est la recherche et la démonstration des propriétés des coniques et des quadriques et que les procédés qui mènent à ce résultat constituent les méthodes générales de la géométrie analytique. Or tout le monde sait que rien n'est plus faux qu'une telle opinion ! En effet la géométrie analytique a pour but l'investigation, à l'aide de coordonnées, de toutes les figures qu'on peut concevoir dans le plan ou dans l'espace; dans ce but, elle emploie des procédés très différents et qui, en général, n'ont aucune analogie avec ceux qui servent pour les figures du second ordre, car ceux-ci ne sont qu'une conséquence et une application des prérogatives des formes quadratiques.

2. — Ces remarques, que je fis dans mon for intérieur depuis plusieurs années et dont je fis part « timidement » à quelques amis (« timidement » eu égard à la magnifique littérature qu'a la géométrie analytique au sens de Biot), reçurent quelques approbations, mais aussi de l'opposition, particulièrement en considération du fait que le programme d'un cours de géométrie analytique conçu de la manière générale que je viens d'indiquer, paraissait ne pouvoir être développé que dans l'hypothèse de l'emploi du calcul différentiel. Bien que cette objection ne m'ait du tout convaincu, car je savais bien que la notion de limite, maniée par une main expérimentée, permet de résoudre un grand nombre de questions géométriques qu'on traite le plus souvent à l'aide de D de différentes formes, je mis la question de côté, car j'estime que les questions didactiques ne peuvent être résolues qu'à l'aide d'expériences directes et répétées et, d'ailleurs, je n'avais aucune chance d'être chargé de faire un cours, ni le temps de composer un nouveau traité sur la matière dont il s'agit.

3. — Mais les études sur l'histoire de la géométrie analytique que je poursuis depuis un quart de siècle [1], m'ont remis sous la main un célèbre traité qui me fit crier, à l'instar d'Archimède, *Eureka* ! Ecrit il y a désormais deux siècles, et bien qu'il pré-

[1] Comparer ma communication *Pour l'histoire de la géométrie analytique* (Verh. des III. intern. Mathem.-Kongresses, Heidelberg, 1904). [J'ai développé complètement ce sujet dans un long mémoire ayant pour titre *Da Descartes e Fermat a Monge e Lagrange, contributo alla storia della geometria analitica* et que j'ai présenté à l'Académie des Lincei dans la séance du 2 décembre 1923. *(Note ajoutée sur les épreuves.)*]

sente à nos yeux une lacune extrêmement regrettable, il *offre cependant le développement parfait des idées que je viens d'exposer.* Il s'agit du vol. II de l'*Introductio in analysin infinitorum*, d'EULER. Tout le monde sait[1] que, tandis que le tome I de cet ouvrage se rapporte complètement aux questions d'ordre numérique, le tome II s'occupe sans exception des propriétés de l'étendue figurée et, comme son titre le dit bien, il précède le traité que le grand mathématicien se proposait d'écrire sur le calcul infinitésimal; l'idée d'infini n'est appelée à y jouer aucun rôle. Cela est d'autant plus remarquable, car le but que se propose Euler est, pour ne parler que de la géométrie plane, l'étude des propriétés des courbes. Nous en avons la preuve dans le fait qu'il ne considère jamais un point isolé, car chaque point est pour lui un élément d'une série continue. En outre, et voilà la lacune signalée plus haut, il considère comme étranger à sa tâche de résoudre les problèmes se rapportant aux distances, angles, etc., problèmes que, au contraire, nous estimons aujourd'hui comme fondamentaux en géométrie analytique; pas même l'expression de la distance entre deux points n'est établie explicitement [2].

4. — Dans le volume dont je m'occupe on trouve exposées clairement les considérations qui permettent d'interpréter les signes des coordonnées cartésiennes (orthogonales ou obliques). Euler montre ensuite comment on opère la transformation des coordonnées, et il en tire deux conséquences remarquables; à savoir: *a*) que les deux coordonnées d'un point sont des grandeurs de la même espèce, ce que Descartes avait manqué de remarquer; *b*) que les droites du plan sont les images géométriques des équations linéaires et celles-ci l'équivalent géométrique de celles-là. De cette proposition fondamentale, Euler tire la signification géométrique du degré de l'équation d'une courbe représentée par un polynome égalé à zéro et l'idée de la classification des lignes algébriques d'après leur ordre. Notre géo-

---

[1] Dans le résumé qui suit, on ne trouvera pas une séparation de ce qui est original et de ce qu'EULER emprunta aux géomètres antérieurs; c'est une recherche étrangère au but de cet article et dont je me suis occupé ailleurs [voir note 1].

[2] C'est mon opinion que l'introduction dans la géométrie analytique des figures qui sont du ressort de la géométrie élémentaire est la conséquence de l'exemple donné par Lagrange dans son mémoire *Sur les pyramides triangulaires*.

mètre montre tout de suite que l'équation d'une courbe permet de découvrir quelques-unes de ses propriétés, par exemple de déterminer le nombre des points nécessaires et suffisants pour fixer la position d'une courbe algébrique.

5. — Le chapitre suivant s'ouvre par la remarque que les lignes droites étant assez connues d'après les éléments de la géométrie, c'est avec les lignes du second ordre que doit commencer l'étude des lignes particulières. En effet, le géomètre de Bâle considère les figures représentées par l'équation générale du second degré en coordonnées cartésiennes et il commence par la déduction des propriétés des coniques relatives aux diamètres et aux axes. Il va sans dire que, tout en conservant ce programme, on peut aujourd'hui arriver aux mêmes conclusions par des calculs plus élégants. La même chose peut se répéter pour ce qui concerne la classification des coniques, qui fait l'objet d'un autre chapitre de l'*Introductio*. A ce moment Euler abandonne les courbes d'un degré particulier pour montrer comment on peut déterminer les branches infinies d'une courbe et les asymptotes correspondantes, tout en n'employant que des considérations élémentaires. Ces méthodes sont immédiatement appliquées aux coniques, ce qui conduit à des conclusions assez simples. Leur importance se voit mieux dans la classification des courbes du 3^me^ et du 4^me^ degré, qu'Euler base sur la considération de leurs points à l'infini. Il expose le sujet sans s'arrêter aux détails les plus menus, mais d'une manière suffisante pour faire comprendre comment on traite les questions de cette espèce, et aussi pour donner une idée de la variété de forme que peuvent présenter les courbes, même si l'on se borne à celles qui sont algébriques. Pour découvrir les propriétés qui peuvent se présenter tout le long d'une ligne, Euler montre comment on peut déterminer la tangente et la normale en un point, calculer la sous-tangente et la sous-normale, trouver les points doubles ou de rebroussement, calculer la courbure et, en conséquence, établir la position des points d'inflexion: tout cela, il est bon de le répéter, sans avoir recours aux dérivées.

6. — Les courbes du second degré étant douées de diamètres, Euler (s'inspirant d'un important Mémoire de Newton) s'occupe ensuite en général des courbes algébriques qui ont la

même propriété, en justifiant, si je peux m'exprimer de la sorte, de s'être arrêté sur ce sujet en exposant plusieurs propriétés élégantes liées à la considération des diamètres. Les problèmes inverses « détermination des équations des courbes jouissant de qualités données », traités après, fournissent l'occasion au grand géomètre de donner plusieurs preuves de sa merveilleuse virtuosité dans le maniement de toutes sortes de calculs. Ses considérations sur la similitude et l'affinité de courbes prouvent qu'il a pressenti le rôle fondamental qu'allait jouer, dans le siècle suivant, le concept de « transformation » dans toute la géométrie.

Les deux chapitres de l'*Introductio* ayant pour but l'application des « intersections de courbes » à la résolution de problèmes déterminés, présentent un caractère tout à fait cartésien. A ce propos qu'il me soit permis de remarquer que c'est surprenant, voir même regrettable, que cet attrayant sujet ait disparu des traités modernes sur l'application de l'algèbre à la géométrie, bien que la substitution des tracés graphiques aux calculs arithmétiques soit un des caractères les plus marqués de la tendance moderne des mathématiques appliquées.

7. — Comme tout ce que je viens de résumer concerne exclusivement les courbes algébriques, on pourrait croire qu'Euler ait voulu exclure de ses considérations les courbes transcendentes. Ce serait une erreur. Non seulement il a montré comme par le seul emploi des coordonnées, et sans l'aide des dérivées, on peut étudier les lignes transcendentes considérées par les anciens (je note, en passant, que les spirales lui offrent l'occasion de faire connaître les coordonnées polaires), mais il aborde encore les « courbes interscendantes » inventées par Leibniz et même des figures étranges, comme celle qui est représentée par l'équation $y = (-1)^x$.

8. — Le beau volume que je viens d'analyser rapidement se clôt par un *Appendix* consacré à la géométrie de l'espace; je pense que le grand géomètre a donné le nom d'*Appendice* à cette section de son traité pour faire comprendre qu'il ne faisait qu'effleurer cette vaste et importante matière sans vouloir l'épuiser. Or, tandis que Clairaut, dans un essai célèbre, avait considéré comme analogues aux courbes planes les lignes à

double courbure, Euler remarque avec raison que, du point de vue que je dirais cartésien, la figure analogue d'une ligne plane est une surface, car c'est une surface qui donne la représentation géométrique d'une fonction à deux variables. Quoique d'après cette considération les trois coordonnées d'un point se présentent sous des aspects différents, Euler ne manque de montrer qu'il s'agit en réalité de trois grandeurs de la même nature. Il expose ensuite les formules qui servent à la transformation des coordonnées et il établit le fait fondamental que « tout plan est représenté par une équation du premier degré » et *vice-versa.* Enfin, il fait connaître les différentes espèces de surfaces représentées par une équation du second degré entre les coordonnées cartésiennes, mais rapidement, sans épuiser l'important sujet. Si donc quelque auteur moderne voulait traiter la géométrie analytique de l'espace en suivant les idées eulériennes (sans s'en tenir à l'*Appendix*), je crois qu'il ferait bien d'étendre à l'espace les raisonnements développés tout au long par le grand mathématicien suisse dans le domaine des courbes planes.

9. — Malgré les détails dans lesquels je suis entré pour mieux établir ma thèse, je crains de n'avoir pas réussi à faire partager aux lecteurs de *L'Enseignement mathématique* mon admiration pour le chef-d'œuvre que je viens d'analyser. Mais je suis certain que si, la lecture de cet article finie, ils recherchent l'*Introductio* dans quelque vieille bibliothèque, ils se convaincront que c'est bien là qu'on trouve la véritable essence de la géométrie analytique. Ils reconnaîtront en même temps que c'est le fait d'avoir donné une place prépondérante, voire même exagérée, aux lignes et aux surfaces du second degré qui a conduit au projet, déjà exécuté d'ailleurs, d'opérer la fusion de la géométrie analytique avec la géométrie projective, deux branches de la géométrie générale qui, dans leurs procédés, n'ont en réalité rien de commun.

Gênes, 1er septembre 1923.