3° Soit $y = \mathrm{L}\,(1 + x)$.

La formule donne:

$$\mathrm{L}(1 + x) \equiv \frac{x}{1} \cdot \frac{1}{1 + x} - \frac{x^2}{2} \frac{1}{(1 + x)^2} + \frac{x^3}{3} \frac{1}{(1 + x)^3} + \cdots$$
$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \frac{1}{(1 + x)^n} + \cdots$$

ou

$$\mathrm{L}(1 + x) \equiv \frac{x}{1 + x} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x}{1 + x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{1 + x}\right)^3 + \cdots$$
$$+ \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{1 + x}\right)^n + \cdots$$

pour toute valeur positive de x.

Si on y fait $x = \frac{1}{\mathrm{N}}$, N entier positif quelconque, on a:

$$\mathrm{L}(\mathrm{N} + 1) - \mathrm{LN} = \frac{1}{\mathrm{N} + 1} - \frac{1}{2} \frac{1}{(\mathrm{N} + 1)^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\mathrm{N} + 1}\right)^3 + \cdots$$

qui donne sous forme de série rapidement convergente la différence tabulaire d'une table de logarithmes népériens c'est-à-dire le moyen de calculer cette table.

Royan, février 1921.

MELANGES ET CORRESPONDANCE

Le Problème des quatre couleurs.

A propos d'une communication de M. J. Chuard.

Dans le n° 6 du tome XXII de l'*Enseignement mathématique*, paru en mai 1923, je lis, aux pages 373 et 374, une note de M. Jules Chuard, *sur le problème des quatre couleurs*. Sans vouloir diminuer son mérite, je lui ai signalé, et je crois que cela peut être intéressant pour les lecteurs de l'*Enseignement math.*, que la proposition à laquelle il arrive n'est certainement pas exacte, dans les termes où il l'a énoncée.

On sait depuis très longtemps, que le problème des quatre couleurs revient à celui de décomposer le réseau cubique (c'est-à-dire à sommets trièdres), en un réseau linéaire (c'est-à-dire formé d'arêtes isolées et reliant deux à deux tous les sommets), et un réseau quadratique (c'est-à-dire formé de polygones isolés passant par tous les sommets), et de façon que tous ces polygones aient un nombre pair de côtés; ce serait le cas, par exemple, s'il n'y avait qu'un seul polygone.

Le point difficile qu'affirme M. Chuard, c'est qu'il existe une décomposition dans laquelle il n'y a qu'un seul polygone; et j'ajoute qu'on a souvent cherché dans cette voie la démonstration du problème, mais jusqu'ici sans succès, à ma connaissance.

Cependant, il n'est pas exact, comme le dit M. Chuard, que dans tout réseau cubique tracé sur une sphère, il existe un polygone passant par tous les sommets. Il est aisé de construire des exemples qui infirment cet énoncé. Et je vous en donne deux ci-dessous.

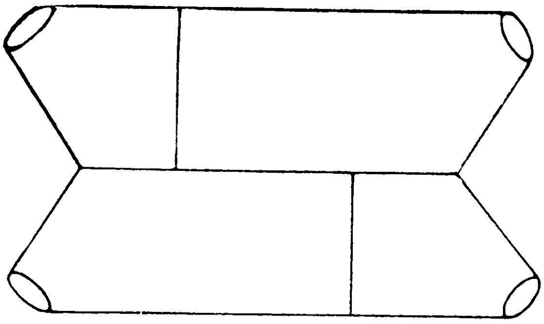

Fig. 1.

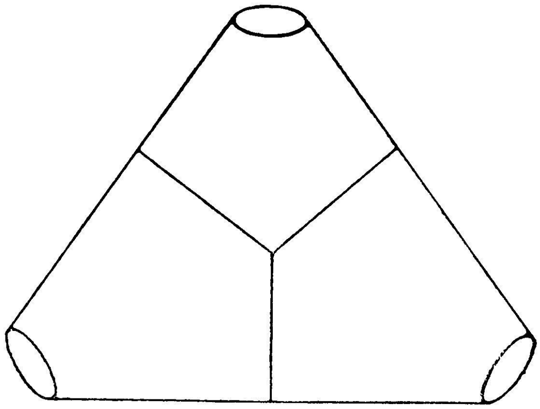

Fig. 2.

Peut-être existe-t-il une propriété de ce genre-ci, et encore, faudrait-il la démontrer: dans tout réseau connexe, traçable sur une sphère, cubique, et satisfaisant à d'autres conditions qu'il faudrait préciser, il existe un polygone passant par tous les sommets. Et si ces conditions sont telles que les réseaux qui ne les satisfont pas sont coloriables en quatre couleurs pour d'autres motifs, alors le théorème des quatre couleurs serait démontré.

UCCLE (Belgique), 16 juillet 1923. A. ERRERA.

Sur les fonctions multipériodiques d'une variable réelle.

A propos d'une Note de M. Winants.

On trouve dans la Note de M. Winants sur les fonctions triplement périodiques (*Enseignement mathématique*, XXII, N° 6, p. 358) la remarque suivante: « on a démontré l'impossibilité d'une fonction (d'une variable réelle) doublement périodique ». Pour rendre cette remarque précise il faudra ajouter: « qui soit *continue* ».

Pour les fonctions *discontinues* d'une variable réelle ce théorème ne s'applique point. Une fonction discontinue d'une variable réelle peut admettre deux, trois, ..., n et même une infinité dénombrable ou non dénombrable de périodes. Par exemple la fonction $f(x)$, égale à 0 pour tous les x de la forme

$$p = m + n\sqrt{2} \qquad (1)$$

(m, n nombres entiers) et égale à 1 pour tous les autres x réels, admet *deux* périodes distinctes: 1 et $\sqrt{2}$, comme il est aisé de voir. La fonction égale à 0 pour tous les x qui sont de la forme

$$p = m_1 + m_2\sqrt{2} + m_3\sqrt{3} \qquad (m_1\,,\ m_2\,,\ m_3 \text{ entiers})$$

et égale à 1 pour tous les autres x réels, admet *trois* périodes distinctes, à savoir: 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$. La fonction de Dirichlet, qui est égale à 0 pour tous les x irrationnels et égale à 1 pour tous les rationnels, admet comme périodes tous les nombres rationels et n'a pas de périodes distinctes. Dans un mémoire « Sur les fonctions multipériodiques uniformes d'une variable réelle » (*Comptes Rendus de la Société des Sciences de Varsovie*, 1918, p. 807-816, dans la langue polonaise, avec un résumé rédigé en français), j'ai construit aussi les fonctions, mesurables ou non mesurables, possédant un ensemble non dénombrable de périodes. On démontre aisément qu'une fonction multipériodique d'une variable réelle est *discontinue* pour toute valeur de la variable indépendante et qu'elle possède des périodes arbitrairement petites; on peut alors donner à ces fonctions *multipériodiques* aussi le nom: *micropériodiques*.

J'ai démontré (*l. c.*), qu'une fonction multipériodique, mesurable et différente de la constante est *presque partout* constante, c'est-à-dire constante hors des points d'un ensemble de mesure nulle (au sens de Lebesgue). Pour qu'un ensemble quelconque de nombres puisse représenter l'ensemble des périodes d'une fonction, il faut et il suffit que cet ensemble contienne les nombres $x + y$ et $x - y$, s'il contient les nombres x et y.

On voit donc qu'il existe des fonctions multipériodiques d'une variable réelle et que l'on peut développer leur théorie.

Antoine LOMNICKI (Lwów, Pologne).

[1] C'est-à-dire qu'ils ne sont pas les multiples entiers d'une même période (v. TANNERY-MOLK, *Fonctions elliptiques*, t. I, p. 141-142).