**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 23 (1923)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** APPLICATION DES MÉTHODES DE H. GRASSMANN A LA GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE DU PLAN

**Autor:** Delens, P.-C.

**Kapitel:** Chapitre VIII. Quelques applications des formes quadratiques intéreures eti cycliques.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-19731

## CHAPITRE VIII

### *Quelques applications des formes quadratiques intéreures eti cycliques.*

Comme nous l'avons déjà signalé, les relations identiques entre formes algébriques de second ordre ou de seconde classe — en particulier — fourniront des identités analogues entre formes intérieures ou formes cycliques. Soient ainsi 4 segments P, Q, R, S du plan; ils sont liés par la relation identique:

$$(P \,.\, Q)(R \,.\, S) + (P \,.\, R)(S \,.\, Q) + (P \,.\, S)(Q \,.\, R) = 0 \qquad (1)$$

de forme:

$$\alpha\, aa' + \beta\, bb' + \gamma\, cc' = 0 \qquad (2)$$

qui signifie seulement que les trois couples $aa'$, $bb'$, $cc'$ sont des formes de seconde classe dégénérées d'un même faisceau tangentiel. On en déduit immédiatement, en prenant les polaires successives de la droite de l'infini:

$$\alpha \frac{a + a'}{2} + \beta \frac{b + b'}{2} + \gamma \frac{c + c'}{2} = 0 \qquad (3)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \qquad (4)$$

comme aussi:

$$\alpha\, a \times a' + \beta\, b \times b' + \gamma\, c \times c' = 0 \qquad (5)$$

$$\alpha\, a \smile a' + \beta\, b \smile b' + \gamma\, c \smile c' = 0 \qquad (6)$$

la première de ces équations rappelant plus généralement que les cercles de Monge des coniques d'un faisceau tangentiel forment un faisceau ponctuel, la seconde traduisant une relation analogue entre les foyers des coniques du faisceau; relation qui, exprimée à partir d'un point quelconque $x$ par:

$$\alpha\, \overrightarrow{xa} \smile \overrightarrow{xa'} + \beta\, \overrightarrow{xb} \smile \overrightarrow{xb'} + \gamma\, \overrightarrow{xc} \smile \overrightarrow{xc'} = 0$$

signifie seulement que les bissectrices des couples de droites joignant $x$ aux foyers des coniques du faisceau appartiennent à une même involution.

De même la relation identique entre 4 points $a$, $b$, $c$, $d$:

$$(a \,.\, b)(c \,.\, d) + (a \,.\, c)(d \,.\, b) + (a \,.\, d)(b \,.\, c) = 0$$

donne aussitôt:

$$\overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{cd} + \overrightarrow{ac} \times \overrightarrow{db} + \overrightarrow{ad} \times \overrightarrow{bc} = 0$$

$$\overrightarrow{ab} \smile \overrightarrow{cd} + \overrightarrow{ac} \smile \overrightarrow{db} + \overrightarrow{ad} \smile \overrightarrow{bc} = 0$$

relations bien connues.

Pour les formes de seconde classe, il est intéressant de noter qu'inversement les relations linéaires entre produits intérieurs et produits cycliques suffisent pour entraîner les relations algébriques.

Ceci revient à dire qu'une courbe de seconde classe est déterminée uniquement par son cercle de Monge et le système de ses foyers, à condition encore que de ces deux données résulte le même centre et la même masse.

Si en effet $f^{\overset{(2)}{\times}}$ et $f^{\overset{(2)}{\smile}}$ sont connus, la forme $f^{(2)}$ elle-même est connue à un multiple près de $j_1 j_2$ dans le premier cas, de $\overset{2}{j_1}$ et $\overset{2}{j_2}$ dans le second: elle est donc bien déterminée.

En conséquence, il sera naturel d'étudier le système linéaire à 5 unités formé par les produits cycliques du 2e ordre. Dans ce système, les produits d'un point par un vecteur (foyers de paraboles) forment un important système à 4 unités. Soient $o$, $u$, $v$ un point quelconque du plan et deux vecteurs unitaires rectangulaires; les relations:

$$o \smile u = u \smile o \qquad o \smile v = v \smile o$$

$$u \smile v = v \smile u \qquad u^{\overset{2}{\smile}} + v^{\overset{2}{\smile}} = 0$$

permettent de garder pour unités, par exemple:

$$o^{\overset{2}{\smile}}, \qquad o \smile u, \qquad o \smile v, \qquad u^{\overset{2}{\smile}}.$$

Comme précédemment pour le produit intérieur, une forme $\Sigma\mu m^{\overset{2}{\smile}}$ à masse différente de zéro et qu'on peut supposer ramenée à l'unité, pourra, si elle a un centre $o$ à distance finie:

$$\Sigma\mu = 1 \qquad \Sigma\mu\, m = 0$$

être mise sous la forme du produit cyclique de deux foyers $f$, $f'$, racines de:

$$f^{\overset{2}{\smile}} - 2o \smile f + \Sigma\mu . m^{\overset{2}{\smile}} = 0$$

$$\left.\begin{matrix} f \\ f' \end{matrix}\right\} = o \pm \sqrt{o^{\overset{2}{\smile}} - \Sigma\mu . m^{\overset{2}{\smile}}} = o \pm \gamma\sqrt{u^{\overset{2}{\smile}}} = o \pm \gamma u$$

donc:

$$\Sigma\mu . m^{\overset{2}{\smile}} = f \smile f' = o^{\overset{2}{\smile}} - \gamma^2 u^{\overset{2}{\smile}} .$$

Toutes les courbes de seconde classe de foyers $f$, $f'$ ont pour forme générale:

$$ff' \mp \beta^2 j_1 j_2 = o^2 - \alpha^2 u^2 \mp \beta^2 v^2$$

avec:

$$\alpha^2 = \pm \beta^2 + \gamma^2 .$$

Plücker a montré comment obtenir les foyers d'une courbe donnée par son équation tangentielle; sous des formes voisines, Siebeck, Möbius, ont étudié les foyers des coniques d'un faisceau tangentiel; Beltrami, Cesaro, Transon, Laguerre, etc. ont fait des études analogues.

Rappelons-en l'essentiel; dans un faisceau $a \smile a'$, $b \smile b'$ figure généralement une forme parabolique $p \smile u$:

$$a \smile a' - b \smile b' = p \smile u . \tag{1}$$

En faisant le produit intérieur par $p^{\overset{2}{\smile}}$:

$$\overrightarrow{pa} \smile \overrightarrow{pa'} = \overrightarrow{pb} \smile \overrightarrow{pb'} = \overrightarrow{pc} \smile \overrightarrow{pc'} \tag{2}$$

si:

$$\alpha\, a \smile a' + \beta\, b \smile b' = (\alpha + \beta)\, c \smile c' . \tag{3}$$

On a aussi:

$$)\frac{\overrightarrow{pa}}{\overrightarrow{pb}} = )\frac{\overrightarrow{pb'}}{\overrightarrow{pa'}}$$

donc $p$ se construit comme centre de similitude de $ab$ et $b'a'$.

Comme on a en outre:

$$\alpha \frac{a + a'}{2} + \beta \frac{b + b'}{2} = (\alpha + \beta) \frac{c + c'}{2}$$

ou:

$$\alpha \frac{\overrightarrow{pa} + \overrightarrow{pa'}}{2} + \beta \frac{\overrightarrow{pb} + \overrightarrow{pb'}}{2} = (\alpha + \beta) \frac{\overrightarrow{pc} + \overrightarrow{pc'}}{2}$$

un couple quelconque $c \smile c'$ du faisceau se construit facilement à partir de $p$, les vecteurs $\overrightarrow{pc}$ et $\overrightarrow{pc'}$ étant donnés par leur demi-somme et leur moyenne cyclique.

Nous avons jusqu'à présent laissé de côté le cas des formes cycliques paraboliques, c'est-à-dire qu'on peut mettre sous la forme $p \smile u$, produit d'un point par un vecteur. Comment se composent ces formes?

Soient $u \smile a$ et $v \smile b$ deux telles formes ($a$, $b$ points, $u$, $v$ vecteurs quelconques ici); toute forme en dépendant linéairement sera:

$$w \smile c = \alpha u \smile a + \beta v \smile b \tag{4}$$

ce qui entraîne (en prenant la polaire de la droite de l'infini):

$$w = \alpha u + \beta v \tag{5}$$

c'est-à-dire la *conservation*, ou la *composition* des vecteurs. Or, dans (4), divisons les vecteurs des 2 membres par un vecteur quelconque $r$; les points $a$, $b$, $c$ sont alors précédés d'opérateurs complexes $)\frac{u}{r}$, $)\frac{v}{r}$, $)\frac{w}{r}$ et nous retrouvons l'addition des points-images de points imaginaires, que nous avons indiquée. Nous pourrons encore dire que dans une expression $u \smile a$, le point $a$ a une masse *vectorielle*, et nous parlerons alors d'une *addition cyclique des points*; les points $c$ résultant de la formule (4) sont en effet situés sur une circonférence, comme foyers de paraboles d'un faisceau tangentiel.

En particulier, l'identité:

$$(c - b) \smile a + (a - c) \smile b + (b - a) \smile c = 0$$

ou:

$$\overrightarrow{bc} \smile a + \overrightarrow{ca} \smile b + \overrightarrow{ab} \smile c = 0 \tag{6}$$

généralisation de celle de la droite:

$$[bc]a + [ca]b + [ab]c = 0$$

situe les trois points $a$, $b$, $c$ sur une même circonférence, la masse vectorielle attachée à chacun d'eux étant proportionnelle au vecteur joignant les deux autres points [1].

---

[1] Une telle addition a été employée pour la représentation des vis de Ball d'un faisceau et du cylindroïde qui le porte.

Au système à cinq unités des formes quadratiques cycliques est adjoint le système complémentaire des expressions du type:

$$a\overset{2}{\smile} \,.\, b\overset{2}{\smile} \,.\, c\overset{2}{\smile} \,.\, d\overset{2}{\smile}$$

qui trouvent une représentation dans les hyperboles équilatères:

$$a^2 \,.\, b^2 \,.\, c^2 \,.\, d^2 \,.\, j_1 j_2$$

déterminées par quatre points $a$, $b$, $c$, $d$ ou quatre conditions linéaires équivalentes. Il n'y a ainsi aucune difficulté à interpréter l'équation scalaire:

$$a\overset{2}{\smile} \,.\, b\overset{2}{\smile} \,.\, c\overset{2}{\smile} \,.\, d\overset{2}{\smile} \,.\, e\overset{2}{\smile} = 0$$

De même, la condition:

$$a\overset{2}{\smile} \,.\, b\overset{2}{\smile} \,.\, c\overset{2}{\smile} \,.\, h\overset{2}{\smile} = 0 \tag{7}$$

signifie que les quatre points $a$, $b$, $c$, $h$ forment un quadrangle orthocentrique — ou sont sur une même droite.

Cette relation pourra encore être écrite:

$$\left(h\overset{2}{\smile} - a\overset{2}{\smile}\right) . \left(h\overset{2}{\smile} - b\overset{2}{\smile}\right) . \left(h\overset{2}{\smile} - c\overset{2}{\smile}\right) = 0$$

ou:

$$\left(\overrightarrow{ah} \smile \frac{a+h}{2}\right) . \left(\overrightarrow{bh} \smile \frac{b+h}{2}\right) . \left(\overrightarrow{ch} \smile \frac{c+h}{2}\right) = 0$$

et elle donne les propriétés déjà énoncées du cercle des neuf points du quadrangle. Ou bien, par:

$$\alpha a\overset{2}{\smile} + \beta b\overset{2}{\smile} = -\left(\gamma c\overset{2}{\smile} + \eta h\overset{2}{\smile}\right) \tag{8}$$

elle donne:

$$\alpha\beta\, \overrightarrow{ab}\overset{2}{\smile} = \gamma\eta\, \overrightarrow{ch}\overset{2}{\smile}$$

c'est-à-dire que $\overrightarrow{ch}$ est perpendiculaire — ou parallèle — à $\overrightarrow{ab}$; ceci résultait également de:

$$\overrightarrow{ab}\overset{2}{\smile} \,.\, \overrightarrow{ch}\overset{2}{\smile} = 0$$

ou:

$$\left(\overrightarrow{ab}\overset{2}{\smile} \,.\, \overrightarrow{ch}\overset{2}{\smile}\right)^{\times} = -\left(\overrightarrow{ab} \,.\, \overrightarrow{ch}\right)\left(\overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{ch}\right) = 0$$

d'après (12, ch. II).

Le produit intérieur entre formes cycliques donne d'autres résultats intéressants. Je rappelle que:

$$m \smile n \mid p \smile q = 0 \tag{9}$$

signifie que les deux couples $m$, $n$ et $p, q$ sont cycliquement conjugués, c'est-à-dire qu'ils ont pour conique harmonique un cercle — courbe dont l'orientation des directions asymptotiques est nulle — sur lequel ils sont conjugués harmoniques. L'équation est en effet équivalente à:

$$\left\{ \begin{aligned} mn\,)(\,pq\,)(\,j_1^2 &= 0 \\ mn\,)(\,pq\,)(\,j_2^2 &= 0 \end{aligned} \right.$$

montrant que les points cycliques appartiennent au lieu:

$$mn\,)(\,pq\,)(\,x^2 = 0$$

L'équation (9) se développe en:

$$\overrightarrow{mp} \smile \overrightarrow{nq} + \overrightarrow{mq} \smile \overrightarrow{np} = 0 \tag{10}$$

$$(p - m) \smile (q - n) + (q - m) \smile (p - n) = 0$$

$$2\,(m \smile n + p \smile q) = (m + n) \smile (p + q) \tag{11}$$

forme de la relation harmonique qui donne les relations vectorielles connues à partir d'une origine arbitraire $x$, qu'on peut en particulier placer en un des points, ou au milieu d'un des couples:

D'après (10) ou:

$$)\frac{\overrightarrow{mp}}{\overrightarrow{mq}} = -\,)\frac{\overrightarrow{np}}{\overrightarrow{nq}}$$

on reconnaît que:

$$)\frac{\overrightarrow{mp}\overset{2}{\times}}{\overrightarrow{mq}\overset{2}{\times}} = )\frac{\overrightarrow{np}\overset{2}{\times}}{\overrightarrow{nq}\overset{2}{\times}}$$

et aussi:

$$\widehat{pmq} = \widehat{pnq} \qquad \text{(module } \pi\text{)}$$

ce qui met en évidence deux cercles orthogonaux, l'un conjugué au couple $p$, $q$ et passant par $m$, $n$, l'autre contenant les quatre points. Soit $o$ le milieu de $p$, $q$ :

$$p + q = 2o$$

et en faisant le produit intérieur de (11) par $o^{\overset{2}{\smile}}$ :

$$\overrightarrow{om} \smile \overrightarrow{on} = \overrightarrow{op}^{\overset{2}{\smile}} = \overrightarrow{oq}^{\overset{2}{\smile}} \tag{12}$$

Tous les couples de vecteurs $\overrightarrow{om}$, $\overrightarrow{on}$ définis par une telle équation, et qui ont $\overrightarrow{op}$ ou $\overrightarrow{oq}$ pour moyenne cyclique, sont formés en joignant le point $o$ aux points $m$ et $n$ qu'on dit correspondants dans une *inversion symétrique* ou *sym-inversion*, de centre $o$, axe $op$, puissance $\overrightarrow{op}^{\overset{2}{\times}}$.

Représentons maintenant par des lettres $x$, $y$ des vecteurs sym-inverses; $e$ étant un vecteur déterminé, l'équation :

$$y = )\frac{e^{\overset{2}{\smile}}}{x} \tag{13}$$

détermine la sym-inversion; ou encore :

$$)\frac{y}{e} = )\frac{e}{x}$$

Pour l'inversion proprement dite, il faut prendre :

$$)\frac{x'}{e} = \mathrm{K}\, )\frac{e}{x}$$

ou :

$$x' = \mathrm{K}\, )\frac{e}{x}\, (e = )\frac{\bar{x}}{e}\, (e = e \overset{2}{\times} \bar{x} \tag{14}$$

$\bar{x}$ étant le vecteur défini comme *inverse* de $x$ avec la puissance d'inversion 1. On voit encore facilement que le produit (séquence) de deux sym-inversions de même pôle est une similitude.

La sym-inversion apparaît aussi comme cas particulier d'une transformation quadratique plus générale, l'*inversion triangulaire*, dont nous allons donner la définition; $a$, $b$, $c$ étant les 3 sommets d'un triangle, un couple de points inverses, $m$, $m'$, sera défini par :

$$a \smile b \;.\; b \smile c \;.\; c \smile a \;.\; m \smile m' = 0 \tag{15}$$

de sorte que $m$ et $m'$ sont les foyers d'une conique inscrite dans le triangle $abc$. Cette équation n'est qu'une généralisation de (7) et si on considère $abc$ comme triangle diagonal d'un quadrangle orthocentrique $efgh$, on peut aussi l'écrire:

$$e\overset{2}{\smile} \,.\, f\overset{2}{\smile} \,.\, g\overset{2}{\smile} \,.\, m \smile m' = 0 \,.$$

Pour la sym-inversion déjà définie par:

$$p \smile q \mid m \smile n = 0 \tag{9}$$

le faisceau d'hyperboles équilatères qui définit la transformation est formée de courbes concentriques passant par $p, q$ et leurs deux anti-points imaginaires; on pourra représenter la transformation par:

$$p\overset{2}{\smile} \,.\, q\overset{2}{\smile} \,.\, \frac{p+q}{2} \smile \mathcal{J}(p-q) \,.\, m \smile n = 0 \tag{16}$$

qui sous une forme équivalente à (9) définit les couples $m, n$ conjugués.

Revenons pour un instant à l'équation (8) pour en tirer de nouvelles conclusions; on peut écrire:

$$\alpha\, a\overset{2}{\smile} + \beta\, b\overset{2}{\smile} = -\left(\gamma\, c\overset{2}{\smile} + \eta\, h\overset{2}{\smile}\right) = -(\gamma + \eta)\, c' \smile c'' \,.$$

De même:

$$\beta\, b\overset{2}{\smile} + \gamma\, c\overset{2}{\smile} = -\left(\alpha\, a\overset{2}{\smile} + \eta\, h\overset{2}{\smile}\right) = -(\alpha + \eta)\, a' \smile a''$$

$$\gamma\, c\overset{2}{\smile} + \alpha\, a\overset{2}{\smile} = -\left(\beta\, b\overset{2}{\smile} + \eta\, h\overset{2}{\smile}\right) = -(b + \eta)\, b' \smile b''$$

(je rappelle que $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ et que ces coefficients se déterminent comme pour l'équation (8, chap. VI).)

Je dis que deux quelconques des couples ainsi obtenus ont une orientante nulle (indéterminée), par exemple:

$$a' \smile a'' \mid b' \smile b'' = 0 \,.$$

C'est en effet:

$$\left(\alpha\, a\overset{2}{\smile} + \eta\, h\overset{2}{\smile}\right) \Big| \left(\beta\, b\overset{2}{\smile} + \eta\, h\overset{2}{\smile}\right) = 0$$

$$\alpha\beta\, \overrightarrow{ab}\overset{2}{\smile} + \left(\alpha\, a\overset{2}{\smile} + \beta\, b\overset{2}{\smile}\right) \Big| \,\eta\, h\overset{2}{\smile} = 0$$

ou:

$$\alpha\beta\,\overrightarrow{ab}\overset{2}{\smile} - \left(\gamma c\overset{2}{\smile} + \eta h\overset{2}{\smile}\right) \mid \eta h\overset{2}{\smile} = 0$$

$$\alpha\beta\,\overrightarrow{ab}\overset{2}{\smile} = \gamma\eta\,\overrightarrow{ch}\overset{2}{\smile}$$

ce que nous avons déjà démontré.

On voit donc la configuration formée par les points $a'$, $a''$, $b'$, $b''$, $c'$, $c''$, situés par quatre sur trois cercles de centres $a$, $b$, $c$, respectivement conjugués aux triangles $bch$, $cah$, $abh$. De même $h$ est centre d'un cercle conjugué au triangle $abc$, comme le traduit:

$$-\eta h\overset{2}{\smile} = \alpha a\overset{2}{\smile} + \beta b\overset{2}{\smile} + \gamma c\overset{2}{\smile}$$

ou:

$$\lambda j_1 j_2 - \eta h^2 = \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2$$

La relation harmonique (9) que nous avons établie entre deux couples $m \smile n$ et $p \smile q$:

$$m \smile n \mid p \smile q = 0$$

signifie que $n$ est le conjugué cyclique de $m$ par rapport à $p \smile q$ donc:

$$\overrightarrow{mp} \smile q + \overrightarrow{mq} \smile p = \left(\overrightarrow{mp} + \overrightarrow{mq}\right) \smile n \;. \tag{17}$$

C'est un cas particulier d'un théorème de Laguerre que le conjugué d'un point $m$ est le même par rapport à une famille de coniques homofocales — c'est-à-dire par rapport aux foyers $f$, $f'$ — que par rapport aux points de contact des tangentes menées de $m$ à une conique de la famille. Soient en effet $\overline{ma}$, $\overline{ma'}$ deux telles tangentes:

$$\mu m^2 + \alpha aa' = (\mu + \alpha)(ff' - \beta^2 j_1 j_2)$$

d'ou:

$$\mu m\overset{2}{\smile} + \alpha a \smile a' = (\mu + \alpha) f \smile f'$$

et en prenant le conjugué cyclique de $m$ par rapport aux 2 membres:

$$\alpha a \smile a' \mid m = (\mu + \alpha) f \smile f' \mid m$$

comme aussi:

$$\alpha a \smile a' \mid m\overset{2}{\smile} = (\mu + \alpha) f \smile f' \mid m\overset{2}{\smile}$$

$$\alpha\,\overrightarrow{ma} \smile \overrightarrow{ma'} = (\mu + \alpha)\,\overrightarrow{mf} \smile \overrightarrow{mf'}$$

ce qui est un théorème de Poncelet.

Quant au théorème de Laguerre, il exprime que tous les cercles circonscrits aux triangles *maa'* pour toutes les coniques homofocales, forment un faisceau.

Cherchons encore l'enveloppe des droites polaires X du point *m* par rapport à un faisceau de coniques homofocales:

$$ff' + \lambda j_1 j_2$$

le lieu est donné par le produit extérieur:

$$(ff' \mid X) \cdot (j_1 j_2 \mid X) \cdot m = 0$$

se développant en:

$$[fX][j_1 X][f'j_2 m] + [fX][j_2 X][f'j_1 m] + [f'X][j_1 X][fj_2 m] + [f'X][j_2 X][fj_1 m] = 0$$

ou:

$$[fX]j_1 j_2)(X\overline{f'm} + [f'X]j_1 j_2)(X\overline{fm} = 0$$

ou:

$$(f\mathfrak{I}\overrightarrow{mf'} + f'\mathfrak{I}\overrightarrow{mf})(X^2 = 0$$

équation tangentielle d'une conique, qui est une parabole (dite de Chasles) et dont la droite de Monge (directrice) a pour équation:

$$(\mathfrak{I}\overrightarrow{mf'} \times f + \mathfrak{I}\overrightarrow{mf} \times f')(x^2 = (2\mathfrak{I}\overrightarrow{mo} \times o)(x_2 = 0$$

tandis que les foyers sont donnés par la forme cyclique:

$$\mathfrak{I}\overrightarrow{mf'} \smile f + \mathfrak{I}\overrightarrow{mf} \smile f' .$$

Or nous avons vu que:

$$\overrightarrow{mf'} \smile f + \overrightarrow{mf} \smile f' = (\overrightarrow{mf} + \overrightarrow{mf'}) \smile n$$

$n$ étant conjugué cyclique de $m$ par rapport à $f$ et $f'$; un des foyers de la parabole est donc ce point $n$, tandis que l'autre est rejeté à l'infini dans la direction du vecteur:

$$\mathfrak{I}(\overrightarrow{mf} + \overrightarrow{mf'}) = 2\mathfrak{I}\overrightarrow{mo}$$

$o$ étant le centre des coniques homofocales.

Nous avons déjà noté que les produits intérieurs de points traduisaient des théorèmes relatifs aux figures formées par les cercles. Mais les produits cycliques transforment et complètent d'heureuse manière les relations ainsi formées. Ainsi nous avons signalé que pour quatre points sur un cercle:

$$a^{\overset{2}{\times}} \,.\, b^{\overset{2}{\times}} \,.\, c^{\overset{2}{\times}} \,.\, d^{\overset{2}{\times}} = 0$$

pouvait s'écrire (12, chap. VI):

$$\begin{vmatrix} \overline{ab}\,\overline{cd}\ )(\ j_1^2 & \overline{ac}\,\overline{db}\ )(\ j_1^2 \\ \overline{ab}\,\overline{cd}\ )(\ j_2^2 & \overline{ac}\,\overline{db}\ )(\ j_2^2 \end{vmatrix} = 0\ .$$

Or ceci traduit:

$$\overline{ab} \smile \overline{cd}\ .\ \overline{ac} \smile \overline{db} = 0 \tag{18}$$

ou:

$$(\overline{ab} \smile \overline{cd}\ .\ \overline{ac} \smile \overline{db})^{\times} = 0 \tag{19}$$

c'est-à-dire que les bissectrices des couples de directions $\overrightarrow{ab}\,\overrightarrow{cd}$, $\overrightarrow{ac}\,\overrightarrow{db}$ et aussi $\overrightarrow{ad}\,\overrightarrow{bc}$ sont confondues si les points $a$, $b$, $c$, $d$ sont sur un cercle. Il est du reste avantageux de développer ces relations sous la forme projective de congruences géométriques, c'est-à-dire d'égalités entre les positions des formes, sans tenir compte des masses qui les affectent; l'équation:

$$\overrightarrow{ab} \smile \overrightarrow{cd} \equiv \overrightarrow{ac} \smile \overrightarrow{db}$$

signifiant seulement:

$$\overrightarrow{ab} \smile \overrightarrow{cd} = \theta\, \overrightarrow{ac} \smile \overrightarrow{db}$$

$\theta$ étant un coefficient numérique dont la valeur importe peu ici. Cette équation, sous la forme:

$$)\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{ac}} \equiv )\frac{\overrightarrow{db}}{\overrightarrow{dc}}$$

rappelle la propriété bien connue de l'angle inscrit:

$$\widehat{bac} = \widehat{bdc} \qquad \text{(module } \pi) \ . \tag{20}$$

C'est du reste ce qu'on retrouve en développant (19) d'après (12, chap. II):

$$(\overrightarrow{ab} \cdot \overrightarrow{ac})(\overrightarrow{cd} \times \overrightarrow{db}) + (\overrightarrow{cd} \cdot \overrightarrow{db})(\overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{ac}) = 0 \qquad (21)$$

$$\sin \widehat{bac} \cos \widehat{bdc} - \sin \widehat{bdc} \cos \widehat{bac} = 0$$

équation qui, résolue en sin. ou tg., redonne la condition (20).

Quant au centre $o$, il est donné par:

$$)\frac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oc}} = )\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{ac}} \left(\mathrm{K}\,)\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{ac}}\right)^{(-1}.$$

On pouvait encore développer (15) sous la forme suivante:

$$[abc]\, b \times c \mid \overset{2}{d^{\times}} - [dbc]\, b \times c \mid \overset{2}{a^{\times}} = 0$$

$$\left([abc]\, \overset{2}{d^{\times}} - [dbc]\, \overset{2}{a^{\times}}\right) \Big| \; b \times c = 0$$

et si on suppose que $a$, $b$, $c$ sont fixes, $d$ variable sur le cercle:

$$b \times c \mid \overset{2}{d^{\times}} - \alpha[bcd] = 0$$

détermine le cercle comme appartenant au faisceau déterminé par le cercle $b \times c$ et la droite $[bc]$.

Montrons comment l'équation du cercle:

$$\overrightarrow{ab} \smile \overrightarrow{cd} \cdot \overrightarrow{ac} \smile \overrightarrow{db} = 0$$

conduit elle aussi au théorème de Ptolémée. Si on la rapproche de l'identité:

$$\overrightarrow{ab} \smile \overrightarrow{cd} + \overrightarrow{ac} \smile \overrightarrow{db} + \overrightarrow{ad} \smile \overrightarrow{bc} = 0$$

on voit que:

$$\frac{\overrightarrow{ab} \smile \overrightarrow{cd}}{\lambda} = \frac{\overrightarrow{ac} \smile \overrightarrow{db}}{\mu} = \frac{\overrightarrow{ad} \smile \overrightarrow{bc}}{\nu}$$

$\lambda$, $\mu$, $\nu$ étant trois nombres tels que:

$$\lambda + \mu + \nu = 0$$

Il s'ensuit la relation entre les normes:

$$\frac{\overrightarrow{ab}^{\overset{2}{\times}}\,\overrightarrow{cd}^{\overset{2}{\times}}}{\lambda^2} = \frac{\overrightarrow{ac}^{\overset{2}{\times}}\,\overrightarrow{db}^{\overset{2}{\times}}}{\mu^2} = \frac{\overrightarrow{ad}^{\overset{2}{\times}}\,\overrightarrow{bc}^{\overset{2}{\times}}}{\nu^2}$$

donc:

$$\sqrt{\overrightarrow{ab}^{\overset{2}{\times}}\,\overrightarrow{cd}^{\overset{2}{\times}}} \pm \sqrt{\overrightarrow{ac}^{\overset{2}{\times}}\,\overrightarrow{db}^{\overset{2}{\times}}} \pm \sqrt{\overrightarrow{ad}^{\overset{2}{\times}}\,\overrightarrow{bc}^{\overset{2}{\times}}} = 0\ .$$

Enfin, notons que:

$$\frac{\overrightarrow{ca} \smile \overrightarrow{db}}{\overrightarrow{cb} \smile \overrightarrow{da}} = \frac{)\dfrac{\overrightarrow{ca}}{\overrightarrow{cb}}}{)\dfrac{\overrightarrow{da}}{\overrightarrow{db}}}$$

est le rapport anharmonique complexe de quatre points du plan. Si ce rapport est un nombre réel, le quatrième point $d$ appartient au cercle déterminé par les trois premiers. S'il est imaginaire, $d$ est seulement image d'un point imaginaire du cercle. Selon la valeur du module du rapport, $d$ appartient à un cercle déterminé par:

$$\frac{\overrightarrow{ca}^{\overset{2}{\times}}\,\overrightarrow{db}^{\overset{2}{\times}}}{\overrightarrow{cb}^{\overset{2}{\times}}\,\overrightarrow{da}^{\overset{2}{\times}}} = \theta^2$$

$$\left(\overrightarrow{ca}^{\overset{2}{\times}}\,b^{\overset{2}{\times}} - \theta^2\,\overrightarrow{cb}^{\overset{2}{\times}}\,a^{\overset{2}{\times}}\right) \Big|\, d^{\overset{2}{\times}} = 0\ .$$

Sous la forme projective, les relations cycliques traduisent les conditions *angulaires*, tandis que les formes intérieures sont, comme on le sait, particulièrement adaptées aux relations *métriques*. Traitons ici un problème du premier type; sur les côtés $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$ d'un triangle sont trois points $e$, $f$, $g$; les cercles circonscrits aux triangles *age, bef, cfg* concourent en un point $d$; il en est de même du cercle circonscrit à $abc$ dans le cas où $e$, $f$, $g$ sont en ligne droite. En effet, soit $d$ le point de concours des deux premiers cercles:

$$\overrightarrow{dg} \smile \overrightarrow{ae} \equiv \overrightarrow{de} \smile \overrightarrow{ag}$$

$$\overrightarrow{de} \smile \overrightarrow{bf} \equiv \overrightarrow{df} \smile \overrightarrow{be}\ .$$

Faisons le produit membre-à-membre des deux équations; après suppression de $\overrightarrow{de}$, il reste:

$$\overrightarrow{dg} \smile \overrightarrow{ae} \smile \overrightarrow{bf} \equiv \overrightarrow{ag} \smile \overrightarrow{df} \smile \overrightarrow{be}$$

mais:

$$[abe] = 0$$

donc:

$$\overrightarrow{ae} \equiv \overrightarrow{be} \, ,$$

d'où:

$$\overrightarrow{dg} \smile \overrightarrow{bf} \equiv \overrightarrow{ag} \smile \overrightarrow{df}$$

ou, d'après:

$$[cbf] = 0 \qquad [acg] = 0$$

$$\overrightarrow{dg} \smile \overrightarrow{cf} \equiv \overrightarrow{df} \smile \overrightarrow{cg}$$

ce qui exprime bien que $d$ est sur le troisième cercle. Si on avait supposé $[efg] = o$, on aurait de même montré que $d$ appartenait au quatrième cercle. La démonstration géométrique usuelle est exactement la même, traduite de préférence par les similitudes:

$$)\frac{\overrightarrow{de}}{\overrightarrow{dg}} \equiv )\frac{\overrightarrow{ae}}{\overrightarrow{ag}} \qquad )\frac{\overrightarrow{df}}{\overrightarrow{de}} \equiv )\frac{\overrightarrow{bf}}{\overrightarrow{be}} \, . \qquad \text{etc.}$$

Le théorème qui mène à la droite de Simson n'est qu'une réciproque particulière du théorème précédent; il suffit de reprendre la démonstration en sens inverse. La démonstration est encore la même quand par l'inversion on substitue des cercles concourants en un point aux droites de la figure, et la configuration présente alors plus de symétrie.

Suivons encore la démonstration suivante: deux cercles variables, tangents entre eux, sont assujettis à avoir chacun, en un point fixe, une tangente déterminée; le lieu de leurs points de contact est formé de deux cercles orthogonaux.

Soient $a$, $b$, $m$ les points de contact fixes et mobile, $c$, $s$, $t$ les points de rencontre des tangentes en ces points:

$$\overrightarrow{ta} \smile \overrightarrow{tm} \equiv \overrightarrow{am}^{\overset{2}{\smile}}$$

$$\overrightarrow{sb} \smile \overrightarrow{sm} \equiv \overrightarrow{bm}^{\overset{2}{\smile}}$$

en divisant membre-à-membre et tenant compte de: $[stm] = 0$

$$)\frac{\overrightarrow{ta}}{\overrightarrow{sb}} \equiv )\frac{\overrightarrow{am}^{\overset{2}{\smile}}}{\overrightarrow{bm}^{\overset{2}{\smile}}}$$

ou:

$$)\frac{\overrightarrow{ca}}{\overrightarrow{cb}} \equiv )\frac{\overrightarrow{am}^{\overset{2}{\smile}}}{\overrightarrow{bm}^{\overset{2}{\smile}}}$$

donc:

$$)\frac{\overrightarrow{ma}}{\overrightarrow{mb}} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \left( )\frac{\overrightarrow{ca}}{\overrightarrow{cb}} \right)^{\left(\frac{1}{2}\right.} \\[2ex] \mathcal{J}\left( )\frac{\overrightarrow{ca}}{\overrightarrow{cb}} \right)^{\left(\frac{1}{2}\right.} \end{array} \right.$$

quelle que soit la détermination prise pour

$$\left( )\frac{\overrightarrow{ca}}{\overrightarrow{cb}} \right)^{\left(\frac{1}{2}\right.}$$

ce qui est bien le théorème énoncé.

Nous avons assez longuement insisté sur les relations conduisant aux lieux circulaires; mais dans le domaine des formes quadratiques on écrit aussi aisément des lieux formés de droites, ou coniques. Ainsi:

$$\overrightarrow{ca} \smile \overrightarrow{cb} \,.\, \overrightarrow{da} \smile \overrightarrow{db} = 0$$

donne comme lieu pour le point $d$ une hyperbole équilatère passant par les points $a$ et $b$, symétriques par rapport à son centre, tandis que:

$$\overrightarrow{ma} \smile \overrightarrow{au} \,.\, \overrightarrow{mb} \smile \overrightarrow{bu} = 0$$

où $a$, $b$, $u$ sont des points et un vecteur fixe, donne comme lieu pour $m$ la droite $\overline{ab}$ et la droite de l'infini.