

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 23 (1923)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: APPLICATION DES MÉTHODES DE H. GRASSMANN A LA GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE DU PLAN
Autor: Delens, P.-C.
Kapitel: Chapitre III. ' ' M ',
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-19731>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 20.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

On vérifie du reste que l'on a :

$$\mathcal{O}_2^{(2)}(ab) = \frac{1}{[j_1 j_2]^2} \left((ab)(j_2^2) j_1^2 + (ab)(j_1^2) j_2^2 \right)$$

donc :

$$\mathcal{O}_2^{(3)}(ab) = \mathcal{O}_2(ab)$$

ce que l'on peut noter .

$$\mathcal{O}_2^{(3)} = \mathcal{O}_2$$

et permet évidemment le calcul des puissances suivantes de l'opération \mathcal{O}_2 .

CHAPITRE III.

Extension du produit cyclique au cas de n vecteurs.

Nous définirons comme *produit cyclique* de n vecteurs $a, b, c \dots l$ l'expression :

$$f^{(n)} = a \cup b \cup c \dots \cup l = \frac{1}{[j_1 j_2]^n} \left((f^{(n)})(j_2^n) j_1^n - (f^{(n)})(j_1^n) j_2^n \right) \quad (1)$$

où on a posé :

$$f^{(n)} = abc \dots l .$$

Cette forme, ou *orientante* de la forme initiale, est, elle aussi, algébrique et de degré n , mais ne dépend que de deux unités, par exemple j_1^n et j_2^n ; elle est en effet apolaire à tout produit :

$$j_1^p j_2^{n-p} \quad (p = 1, 2 \dots, n-1)$$

et l'est aussi à la forme initiale $f^{(n)}$. On peut encore l'écrire sous forme d'un jacobien généralisé :

$$f^{(n)} = \theta_n f^{(n)} \cdot j_1^{n-1} j_2 \cdot j_1^{n-2} j_2^2 \dots \cdot j_1 j_2^{n-1} \quad (2)$$

le coefficient θ_n pouvant se déterminer par le calcul de j_1^n , par exemple, ce qui donne :

$$\theta_n = \frac{C_n^1 C_n^2 \dots C_n^{n-1}}{\frac{n(n-1)}{[j_1 j_2]^2}} \quad (3)$$

le numérateur étant le produit des coefficients du binôme.

Comme pour le produit cyclique de deux vecteurs, on peut toujours résoudre l'équation binôme :

$$x^n = f^{(n)} \quad (4)$$

soit en la ramenant à l'équivalence :

$$x^n = f^{(n)} + \lambda_1 j_1^{n-1} j_2 + \lambda_2 j_2^{n-1} j_1$$

que nous écrirons de manière abrégée :

$$x^n = f^{(n)} \pmod{j_1 j_2} \quad (5)$$

puis déterminant les coefficients λ par la condition que le premier membre soit une puissance n^{me} parfaite ; soit encore en la remplaçant par le système d'équations simultanées :

$$\begin{cases} x^n \pmod{j_1^n} = f^{(n)} \pmod{j_1^n} \\ x^n \pmod{j_2^n} = f^{(n)} \pmod{j_2^n} \end{cases} \quad (6)$$

Il résulte des considérations précédentes que les formes :

$$f^{(n)} \quad \text{et} \quad f^{(n)} + \lambda j_1 j_2 g^{(n-2)}$$

sont équivalentes pour le produit cyclique, quelle que soit la forme $g^{(n-2)}$ et aussi que les n solutions de l'équation binôme forment le faisceau régulier de n vecteurs que représente l'orientante $f^{(n)}$, faisceau apolaire au couple isotrope $j_1 j_2$.

On voit encore que les seuls produits cycliques qui sont nuls sans qu'un de leurs facteurs du premier ordre s'annule sont ceux qui admettent comme facteur (du second ordre) $j_1 \cup j_2$. C'est Laguerre qui a introduit la notion d'*orientation* (relative à un axe de repère u) d'un faisceau de directions ; G. Humbert a désigné sous ce nom, pour la forme $abc \dots l$ le coefficient :

$$(-1)^n \frac{abc \dots l \pmod{j_1^n}}{abc \dots l \pmod{j_2^n}} = (-1)^n \frac{\zeta_a \zeta_b \dots \zeta_l}{\bar{\zeta}_a \bar{\zeta}_b \dots \bar{\zeta}_l}$$

en coordonnées symétriques :

$$\begin{aligned} \zeta &= \xi + \eta \\ \bar{\zeta} &= \xi - \eta \end{aligned}$$

Nous pouvons sans inconveniient modifier la définition de Humbert en négligeant le facteur $(-1)^n$, de sorte que l'orientation sera définie par :

$$\omega = \frac{f^{(n)})(j_1^n)}{f^{(n)})(j_2^n)} \quad (7)$$

qui est le coefficient essentiel d'une orientante, d'équation :

$$(j_1^n - \omega j_2^n)(x^n = 0).$$

Les propriétés des orientations résulteront donc immédiatement de celles des orientantes, c'est-à-dire du produit cyclique. Il est évident que celui-ci est commutatif, mais il nous reste à montrer ce qu'on pourra considérer comme la *propriété associative* du produit, bien que cette propriété soit toute autre que celle qu'on considère dans les systèmes *numériques* complexes; le même cas se présente déjà, du reste, pour le produit extérieur de Grassmann.

Nous allons établir que si une forme $f^{(n)}$ est le produit algébrique de formes d'ordre moindre, telles que $g^{(p)}$, l'orientante $f^{(n)}$ est un produit des orientantes $g^{(p)}$, et pour le produit ainsi défini nous conserverons le signe \cup du produit cyclique.

Nous remarquerons d'abord que si deux formes orientantes :

$$a^{(p)} = \alpha_1 j_1^p - \alpha_2 j_2^p$$

$$a'^{(p)} = \alpha_1 j_1^p + \alpha_2 j_2^p$$

diffèrent par le signe du coefficient de j_2^p , c'est-à-dire ont des orientations opposées, la seconde est fonction linéaire de la première — et inversement — le symbole de cette fonction ne dépendant pas de la forme considérée.

En effet :

$$a^{(p)})(j_2^p = \alpha_1 [j_1 j_2]^p$$

$$a'^{(p)})(j_1^p = -\alpha_2 [j_2 j_1]^p$$

donc :

$$a'^{(p)} = \frac{1}{[j_1 j_2]^p} \left((a^{(p)})(j_2^p) j_1^p - (-1)^p (a^{(p)})(j_1^p) j_2^p \right) = \mathcal{C}_p (a^{(p)}). \quad (8)$$

Supposons maintenant :

$$\begin{aligned} f^{(n)} &= g^{(p)} h^{(q)} & (p + q = n) \\ [j_1 j_2]^n f^{(n)} &= \varphi_1 j_1^n - \varphi_2 j_2^n \\ [j_1 j_2]^p g^{(p)} &= \gamma_1 j_1^p - \gamma_2 j_2^p \\ [j_1 j_2]^q h^{(q)} &= \eta_1 j_1^q - \eta_2 j_2^q \end{aligned}$$

avec :

$$\varphi_1 = f^{(n)} \quad (j_2^n = (g^{(p)})(j_2^p)(h^{(q)})(j_2^q) = \gamma_1 \eta_1$$

$$\varphi_2 = \gamma_2 \eta_2$$

donc :

$$[j_1 j_2]^n f^{(n)} = \gamma_1 j_1^p \eta_1 j_1^q - \gamma_2 j_2^p \eta_2 j_2^q .$$

Le second membre est de la forme :

$$A_1 B_1 - A_2 B_2 = \frac{1}{2} \left[(A_1 - A_2)(B_1 + B_2) + (B_1 - B_2)(A_1 + A_2) \right]$$

donc :

$$f^{(n)} = \frac{1}{2} \left(g^{(p)} \mathcal{O}_q(h^{(q)}) + h^{(q)} \mathcal{O}_p(g^{(p)}) \right) = g^{(p)} \cup h^{(q)} \quad (9)$$

et comme on a vu en même temps :

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

l'orientation de $f^{(n)}$ est aussi le produit des orientations de $g^{(p)}$ et $h^{(q)}$.

REMARQUE. — L'opération linéaire \mathcal{O}_p précédemment employée *sur une orientante* est reliée simplement à l'opération \mathcal{O}_p qui donne l'orientante d'une forme d'ordre p . On a, en effet, quelle que soit la parité de p :

$$\mathcal{O}_p = \mathcal{O}_p^{(2)}$$

mais si p est pair, on a plus simplement :

$$\mathcal{O}_p = \mathcal{O}_p .$$