

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 23 (1923)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: APPLICATION DES MÉTHODES DE H. GRASSMANN A LA GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE DU PLAN
Autor: Delens, P.-C.
Kapitel: Chapitre II. Géométrie métrique des vecteurs du plan : produits de deux vecteurs.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-19731>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 21.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

p éléments analogues du second une combinaison scalaire sur le modèle du produit polaire, tandis que nous avons réservé le symbole \times de ce produit pour le cas où tous les éléments d'une des formes au moins entraient dans un tel produit.

En dehors des méthodes de Grassmann, Hamilton, ou de leurs disciples, la théorie des formes n'a guère considéré les opérateurs linéaires : homographies ou réciprocitys, symboles de transformations quadratiques, etc. Il ne nous semble pas nécessaire de les traiter dans cette introduction.

CHAPITRE II.

Géométrie métrique des vecteurs du plan : produits de deux vecteurs.

Ce sont les points de la droite de l'infini du plan qu'on représente par les vecteurs. Les opérations de la géométrie métrique peuvent se définir à partir des seuls vecteurs réels, mais il est plus direct d'introduire dès le début des éléments imaginaires, à savoir les vecteurs isotropes (points cycliques) du plan.

Tandis que nous représenterons par u et v deux vecteurs égaux (que nous dirons unitaires) et rectangulaires, les vecteurs isotropes seront désignés par :

$$j_1 = u + iv \quad j_2 = u - iv \quad (i = \sqrt{-1})$$

Le *produit intérieur* de deux vecteurs a, b est dès lors défini par le produit polaire suivant ¹ :

$$a \times b = ab \times (j_1 j_2 = \frac{[aj_1][bj_2] + [aj_2][bj_1]}{2}) \quad (1)$$

Comme :

$$j_1 j_2 = u^2 + v^2$$

il peut aussi s'écrire, comme l'on sait :

$$a \times b = ab \times (u^2 + v^2) = [au][bu] + [av][bv] . \quad (2)$$

¹ Cf. R. MEHMKE. *Vorlesungen über Punkt und Vektorenrechnung*, I, 1, p. 289.

Ses propriétés sont bien connues; nous rappellerons cependant qu'en conséquence de la définition, on a :

$$j_1^{\times 2} = j_2^{\times 2} = 0$$

et qu'un tel produit étant scalaire, on pose souvent, pour simplifier les calculs :

$$u^{\times 2} = v^{\times 2} = 1 = \frac{1}{2}(j_1 \times j_2) \quad (3)$$

l'homogénéité rompue pouvant ensuite être rétablie au moyen de la même égalité (ce qui revient à calculer avec $\frac{a \times b}{u^{\times 2}}$).

Tandis que le produit algébrique de deux vecteurs ne s'annule qu'avec l'un de ses facteurs, il n'en est plus de même pour le produit intérieur. Il sera aussi toujours possible de résoudre une équation intérieure :

$$\pm x^{\times 2} = a \times b$$

Supposons, par exemple, $a \times b$ positif; l'équation peut s'écrire :

$$x^2)(j_1 j_2 = ab)(j_1 j_2$$

et la division par $j_1 j_2$ est possible et donne :

$$x^2 = ab + \lambda_1 j_1^2 + \lambda_2 j_2^2$$

λ_1 et λ_2 étant deux paramètres indéterminés; ou encore :

$$x^2 = ab \quad (\text{modules } j_1^2, j_2^2)$$

c'est-à-dire qu'on est ramené à une *équivalence algébrique*; nous utiliserons à plusieurs reprises ce mode de solution; si on veut poursuivre jusqu'au bout, il faut écrire :

$$x^2)(= (ab + \lambda_1 j_1^2 + \lambda_2 j_2^2)(= 0$$

équation scalaire de condition entre λ_1 et λ_2 .

Ce produit intérieur de deux vecteurs aurait aussi pu être défini par :

$$a \times b = ab \left(\frac{j_1^2 \cdot j_2^2}{[j_1 j_2]} \right)$$

et pour plus de deux vecteurs on pourrait ainsi envisager diverses extensions du produit intérieur : mais aucune n'a semblé jusqu'ici s'imposer avec quelque utilité.

Arrivons à ce que Grassmann a appelé *produit complexe* de deux vecteurs, défini du reste seulement par des lois formelles. Non sans quelque hésitation, à cause des nombreuses acceptions du mot *complexe*, nous proposerons de substituer au terme usité par Grassmann celui de *produit cyclique*.

Entre deux vecteurs, nous définirons ce produit par l'expression :

$$a \smile b = \frac{1}{[j_1 j_2]^2} \left((ab) (j_2^2) j_1^2 - (ab) (j_1^2) j_2^2 \right) \quad (4)$$

qui peut encore s'écrire :

$$a \smile b = \frac{2}{[j_1 j_2]} ab \cdot j_1 j_2 . \quad (5)$$

En effet, l'on a :

$$j_1 j_2 = \frac{j_1^2 \cdot j_2^2}{[j_1 j_2]}$$

et :

$$ab \cdot (j_1^2 \cdot j_2^2) = \frac{1}{2} \left((ab) (j_2^2) j_1^2 - (ab) (j_1^2) j_2^2 \right) .$$

Pour développer $a \smile b$ sous la forme (5), il est commode d'employer la relation identique entre les quatre formes aj_1 , aj_2 , bj_1 , bj_2 :

$$[aj_1]bj_2 - [aj_2]bj_1 = [bj_1]aj_2 - [bj_2]aj_1 . \quad (6)$$

On voit aussitôt que :

$$j_1 \smile j_2 = 0$$

et que le produit cyclique de deux vecteurs est une nouvelle forme quadratique, mais dépendant seulement de deux unités, par exemple j_1^2 et j_2^2 ; cette forme est en effet toujours apo-

laire (conjuguée) d'une part à $j_1 j_2$, d'autre part à la forme primitive, en vertu de :

$$\begin{aligned} ab \cdot j_1 j_2 \cdot j_1 j_2 &= 0 \\ ab \cdot j_1 j_2 \cdot ab &= 0 . \end{aligned}$$

Le produit cyclique de deux vecteurs représente donc le système des bissectrices du produit algébrique, avec un coefficient approprié. Nous dirons encore que $a \smile b$ est l'*orientante* de ab .

On a évidemment :

$$\begin{aligned} u^2 &= \frac{1}{[uv]} u^2 \cdot (u^2 + v^2) = uv \\ v^2 &= -uv \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{cases} u^2 + v^2 = 0 \\ u \smile v = v \smile u \end{cases} \quad \text{ainsi que :} \quad (7)$$

soit les règles énoncées par Grassmann.

Remarquons encore qu'à l'exception du produit $j_1 \smile j_2$, le produit cyclique ne s'annule qu'avec l'un de ses facteurs, et aussi qu'on peut toujours satisfaire à l'équation :

$$\begin{aligned} x^2 &= a \smile b & \text{ou :} & \\ x^2 \cdot j_1 j_2 &= ab \cdot j_1 j_2 . \end{aligned} \quad (8)$$

La division par $j_1 j_2$ est en effet possible et donne :

$$x^2 = ab + \lambda j_1 j_2$$

ou :

$$x^2 = ab \quad (\text{module } j_1 j_2)$$

ce qui montre qu'à une équation cyclique (entre produits cycliques), on peut faire correspondre une *équivalence* ou *congruence* suivant le module $j_1 j_2$.

Quant au facteur indéterminé λ , sa valeur résulte de :

$$x^2)^2 = (ab + \lambda j_1 j_2)^2 = 0 .$$

Enfin, une équation cyclique, telle que (8.), peut aussi être remplacée par le système de deux équations scalaires :

$$\begin{cases} x^2)(j_1^2 = ab)(j_1^2 \\ x^2)(j_2^2 = ab)(j_2^2 \end{cases} \quad (9)$$

c'est-à-dire par un système d'équations écrites en coordonnées *symétriques*.

Nous allons maintenant établir diverses formules de réduction entre produits cycliques de deux vecteurs, montrant aussi leur lien avec le produit intérieur.

Ainsi le produit polaire de deux orientantes a pour expression :

$$a \smile b)(c \smile d = \frac{4}{[j_1 j_2]^2} (ab \cdot j_1 j_2)(cd \cdot j_1 j_2)$$

se développant en :

$$= \frac{2}{[j_1 j_2]^2} \begin{vmatrix} ab)(cd & j_1 j_2)(cd \\ ab)(j_1 j_2 & j_1 j_2)(j_1 j_2 \end{vmatrix}$$

donc :

$$a \smile b)(c \smile d = -ab)(cd + \frac{1}{2} (a \times b)(c \times d) . \quad (10)$$

En particulier, l'équation : $a \smile b)(c \smile d = 0$ exprime en général que les bissectrices des couples ab et cd se bissectent mutuellement.

Une autre expression à considérer est :

$$a \smile b)(cd = \frac{2}{[j_1 j_2]} ab \cdot j_1 j_2 \cdot cd = -ab)(c \smile d .$$

Une telle expression, fonction linéaire de $a \smile b$ comme de $c \smile d$, est un produit particulier entre ces orientantes; c'est ce que nous allons retrouver ci-après. Remarquons d'abord que l'expression s'écrit aussi :

$$- \frac{2}{[j_1 j_2]} (ab \cdot cd)(j_1 j_2 = - (ab \cdot cd)^\times$$

c'est-à-dire qu'elle représente à un facteur près l'invariant

intérieur du jacobien de ab et cd . Donc l'équation :

$$(ab \cdot cd)^{\times} = 0$$

signifie que les couples ab et cd ont mêmes bissectrices.

Or le jacobien de $a \smile b$ et $c \smile d$ représente évidemment $j_1 j_2$ affecté d'un certain coefficient : si celui-ci était nul, ab et cd auraient encore mêmes bissectrices, d'où :

$$a \smile b \cdot c \smile d = \lambda (ab \cdot cd)^{\times}_{j_1 j_2}.$$

On détermine le coefficient λ en considérant en particulier :

$$j_1^2 \cdot j_2^2 = \lambda (j_1^2 \cdot j_2^2)^{\times}_{j_1 j_2}.$$

ce qui donne :

$$\lambda = -\frac{1}{2},$$

d'où la formule :

$$a \smile b \cdot c \smile d = -\frac{1}{2} (ab \cdot cd)^{\times}_{j_1 j_2} \quad (11)$$

et par suite aussi, en substituant le produit intérieur au produit algébrique :

$$\begin{aligned} (a \smile b \cdot c \smile d)^{\times} &= - (ab \cdot cd)^{\times} \\ &= - \frac{[ac]b \times d + [bd]a \times c}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

donc :

$$a \smile b \cdot c \smile d = -ab \cdot c \smile d = (a \smile b \cdot c \smile d)^{\times} \quad (13)$$

ce qui est bien, comme nous l'avons annoncé, une fonction linéaire d'un produit entre $a \smile b$ et $c \smile d$, donc un nouveau produit entre ces formes

REMARQUE. — Nous avons, dans ce qui précède, employé autant que possible des symboles d'opération; on est parfois amené à leur substituer des symboles fonctionnels. Ainsi, prendre l'orientante de ab peut être représenté par :

$$a \smile b = \mathcal{O}_2(ab)$$

de sorte que l'orientante de cette nouvelle forme serait :

$$\mathcal{O}_2(a \smile b) = \mathcal{O}_2(\mathcal{O}_2(ab) = \mathcal{O}_2^2(ab).$$

On vérifie du reste que l'on a :

$$\mathcal{O}_2^{(2)}(ab) = \frac{1}{[j_1 j_2]^2} \left((ab)(j_2^2)j_1^2 + (ab)(j_1^2)j_2^2 \right)$$

donc :

$$\mathcal{O}_2^{(3)}(ab) = \mathcal{O}_2(ab)$$

ce que l'on peut noter .

$$\mathcal{O}_2^{(3)} = \mathcal{O}_2$$

et permet évidemment le calcul des puissances suivantes de l'opération \mathcal{O}_2 .

CHAPITRE III.

Extension du produit cyclique au cas de n vecteurs.

Nous définirons comme *produit cyclique* de n vecteurs a, b, c, \dots, l l'expression :

$$f^{(n)} = a \smile b \smile c \dots \smile l = \frac{1}{[j_1 j_2]^n} \left((f^{(n)})(j_2^n)j_1^n - (f^{(n)})(j_1^n)j_2^n \right) \quad (1)$$

où on a posé :

$$f^{(n)} = abc \dots l.$$

Cette forme, ou *orientante* de la forme initiale, est, elle aussi, algébrique et de degré n , mais ne dépend que de deux unités, par exemple j_1^n et j_2^n ; elle est en effet apolaire à tout produit :

$$j_1^p j_2^{n-p} \quad (p = 1, 2, \dots, n-1)$$

et l'est aussi à la forme initiale $f^{(n)}$. On peut encore l'écrire sous forme d'un jacobien généralisé :

$$f^{(n)} = \theta_n f^{(n)} \cdot j_1^{n-1} j_2 \cdot j_1^{n-2} j_2^2 \dots \cdot j_1 j_2^{n-1} \quad (2)$$

le coefficient θ_n pouvant se déterminer par le calcul de j_1^n , par exemple, ce qui donne :

$$\theta_n = \frac{C_n^1 C_n^2 \dots C_n^{n-1}}{[j_1 j_2]^{\frac{n(n-1)}{2}}} \quad (3)$$

le numérateur étant le produit des coefficients du binôme.