Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 23 (1923)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: APPLICATION DES MÉTHODES DE H. GRASSMANN A LA GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE DU PLAN

Autor: Delens, P.-C.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19731

APPLICATION DES MÉTHODES DE H. GRASSMANN A LA GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE DU PLAN

PAR

P.-C. DELENS (Le Hâvre).

Si H. Grassmann a pensé établir, dans son « Ausdehnungslehre » un instrument de calcul géométrique d'une portée universelle, les éditeurs mêmes de ses œuvres n'ont pas manqué de rappeler à ses disciples qu'un tel espoir leur semblait vain : le rêve de Leibnitz, le commencement de réalisation qu'il reçut de Grassmann, seraient trop ambitieux et il faudrait se contenter d'algorithmes spéciaux, propres à traduire les opérations à l'intérieur de certains groupes ! Si juste que puisse être cette réserve, nous craignons qu'elle n'ait contribué à faire apparaître le calcul géométrique comme un ensemble de recettes particulières bien isolées les unes des autres, et par suite sans grande généralité.

En fait, dans beaucoup des applications qu'on a publiées, la méthode de Grassmann a manqué de souplesse : puissante pour les grandes constructions théoriques, elle n'a pas toujours atteint le but que lui assignait Leibnitz « donner en même temps la solution et la construction et la démonstration géométrique, le tout d'une manière naturelle et par une analyse — c'est-à-dire par des voies déterminées ». Mais nous croyons encore possible, suivant le plan de Grassmann, d'aérer quelque peu l'édifice en abattant quelques-unes des cloisons étanches qui en séparent les diverses parties.

Le travail que nous publions ici a pour objet la géométrie métrique du plan : nous y reprenons le *produit intérieur* avec l'extension que lui avait donnée Grassmann dans un essai fort discuté et peu compris, et y adjoignons ce *produit complexe* également signalé par l'auteur de l'« Ausdehnungslehre », sans qu'il en ait fait d'applications. Ces deux produits étant déduits et rapprochés naturellement du *produit algébrique* comme du *produit combinatoire* ou *extérieur*, l'algèbre de la géométrie métrique est bien contenue dans celle de la géométrie projective. Nous pensons établir, en outre — et malgré que la brièveté de cet exposé le rende incomplet — qu'il est désormais possible de décrire et de noter simplement les constructions de la géométrie élémentaire, y compris celles de cette géométrie du plan complexe qui s'apparente si étroitement à la théorie des fonctions et de former, en somme, pour chaque configuration, l'identité algébrique qui la traduit.

Dans toute étude de ce genre se pose encore la question de notations : quoique nous efforçant à des notations complètes et uniformes, nous ne croyons guère possible de ne pas user d'abréviations et d'enlever au lecteur le bénéfice de toute attention; le contexte suffira sans doute à lever toute incertitude. En outre, quand aucune confusion ne sera à craindre, nous supprimerons souvent les symboles opératoires.

Chapitre Premier.

Géométrie projective du domaine binaire.

Entre deux éléments a et b d'un tel domaine, Grassmann a défini les produits suivants :

algébrique	$ab = ba$
extérieur	$[ab] = -[ba]$

que nous écrirons encore : $\overline{ab} = -\overline{ba}$ et aussi : $a.b = -b.a$. Tandis que le produit extérieur de deux éléments dépend de $\frac{2(2-1)}{2} = 1$ unité, c'est-à-dire est scalaire, le produit algébrique dépend de $\frac{2(2+1)}{2} = 3$ unités. Un tel produit, ou forme géométrique quadratique, appartient donc à un nouveau système linéaire, dans lequel on peut définir de nouveaux produits. Nous nous intéresserons à quelques-uns d'entre eux en indiquant leur construction à partir des éléments initiaux du domaine binaire.

On peut, en particulier, prendre comme unités du 2me ordre trois carrés algébriques, soit a^2, b^2, c^2, et se contenter de définir les opérations sur de tels carrés. Entre les éléments du 2me ordre nous envisagerons les produits :

polaire[1] $\quad a^2 \,)(\, b^2 = b^2 \,)(\, a^2 = [ab]^2$

jacobien $\quad a^2 \,.\, b^2 = - b^2 \,.\, a^2 = [ab]\, ab$

qui, étendus à des formes plus générales :

$$f^{(2)} = \Sigma a^2 \qquad g^{(2)} = \Sigma b^2$$

s'écrivent symboliquement :

$$f^{(2)} \,)(\, g^{(2)} = g^{(2)} \,)(\, f^{(2)} = [fg]^2$$

$$f^{(2)} \,.\, g^{(2)} = - g^{(2)} \,.\, f^{(2)} = [fg] fg \; .$$

Le premier nous ramène aux scalaires; le nom que nous lui donnons se justifie par le fait que quand l'invariant $[fg]^2$ est nul, les deux formes $f^{(2)}$ et $g^{(2)}$ sont dites apolaires.

Le second n'est qu'une fonction linéaire d'un produit extérieur dans le système des éléments du 2me ordre. Comme $[fg]$ symbolise un scalaire, on voit que ce produit est de nouveau une forme quadratique, à savoir la jacobienne des formes $f^{(2)}$ et $g^{(2)}$.

Si nous ajoutons que toute forme quadratique peut se ramener à un produit algébrique de deux éléments, distincts ou confondus, ses deux points-racines, on voit que l'équation caractérisant ces racines n'est autre que :

$$ab \,)(\, x^2 = [ax][bx] = 0 \; .$$

---

[1] Les nécessités d'impression ont substitué au symbole choisi pour le produit polaire : deux parenthèses entrecroisées — souvent employées dans un sens analogue dans la théorie des formes — celui du texte, où les parenthèses sont juxtaposées. *(Note de l'auteur.)*

Enfin, notons que trois carrés algébriques donnent lieu au produit :

$$\textit{jacobien} \qquad (a^2 . b^2)(c^2 = [ab][ac][bc] = - [ab][bc][ca]$$

que nous écrirons encore :

$$[a^2 . b^2 . c^2] \qquad \text{ou} \qquad a^2 . b^2 . c^2$$

qui n'est autre qu'un produit extérieur entre éléments du 2^{me} ordre, et est de nouveau un scalaire. Il s'ensuit immédiatement la définition du produit plus général :

$$[f^{(2)} . g^{(2)} . h^{(2)}] = \Sigma [a^2 . b^2 . c^2] \ .$$

Rappelons encore que la 1^{re} polaire d'un élément du 1^{er} ordre m par rapport à une forme quadratique est obtenue par :

$$f^{(2)})(m = f^{(2)} \cdot m = \Sigma [am] a$$

et a par suite, pour équation :

$$f^{(2)})(mx = [(f^{(2)} . m)x] = \Sigma [am][ax] = 0 \ .$$

Les opérations que nous venons d'énoncer sont familières à tous ceux qui connaissent la théorie des formes algébriques, quel que soit le procédé par lequel on les expose [1]. Notre but n'est pas de reprendre toute cette théorie en nous contentant de changer quelques notations; nous devons cependant pour plus de clarté, envisager rapidement le système des produits et formes algébriques d'ordre n.

On obtient une telle forme comme produit algébrique de n éléments du 1^{er} ordre, ou points, ou comme somme de tels produits; une forme d'ordre n peut aussi se ramener à la somme de $n+1$ puissances algébriques n^{mes}, linéairement indépendantes, et qu'on peut choisir comme unités du système linéaire. Nous poserons encore :

$$f^{(n)} = \Sigma a^n$$

pour la forme d'équation :

$$f^{(n)})(x^n = \Sigma [ax]^n = 0$$

[1] Cf. par exemple J. H. GRACE and A. YOUNG. *The Algebra of Invariants.*

et définirons le produit :

jacobien généralisé $\quad f^{(n)} . g^{(n)} . h^{(n)} \ldots = \Sigma a^n . b^n . c^n \ldots$

avec :

$$a^n . b^n = [ab] a^{n-1} b^{n-1} = \Sigma [ab] a'^{2n-2}$$

$$a^n . b^n . c^n = \Sigma [ab] [a'c]^2 a'^{2n-4} c^{n-2} \quad , \quad \text{etc.}$$

produits qui représentent successivement des formes d'ordres :

$$2(n-1) \qquad 3(n-2) \ldots \quad \text{etc.}$$

de sorte que le produit jacobien de $n+1$ formes d'ordre n est une forme d'ordre $(n+1)(n-n) = 0$, c'est-à-dire est scalaire.

A partir d'une forme d'ordre n, $f^{(n)}$, et d'un point m on définit les différentes polaires du point, à savoir

1re polaire $\quad f^{(n)})(m = f^{(n)} . m = \Sigma [am] a^{n-1}$

$p$me polaire $\quad f^{(n)})(m^p = f^{(n)} \overset{p}{.} m^p = \Sigma [am]^p a^{n-p} \qquad p < n$

c'est-à-dire la forme d'ordre $n - p$ qui a pour équation

$$f^{(n)})(m^p x^{n-p} = \Sigma [am]^p [ax]^{n-p} = 0$$

invariant polaire $\quad f^{(n)})(m^n = f^{(n)} \overset{n}{.} m^n = \Sigma [am]^n$

Sur ce type est basée l'opération plus générale de *transvection* entre deux formes d'ordres n et n', $f^{(n)}$ et $g^{(n')}$, dont le $p$me transvectant a pour expression

$$h^{(n+n'-2p)} = f^{(n)} \overset{p}{.} g^{(n')} = \Sigma [ab]^p a^{n-p} b^{n'-p}$$

et pour équation :

$$h^{(n+n'-2p)})(x^{n+n'-2p} = \Sigma [ab]^p [ax]^{n-p} [bx]^{n'-p} = 0 \ ;$$

Nous n'envisagerons pas ici les autres opérations invariantes possibles; on peut du reste les construire toutes comme les précédentes au moyen de produits entre les formes lacunaires de Grassmann. Dans celles que nous avons considérées, avec quelque apparence de diversité dans les symboles, notons que nous avons employé le signe $\overset{p}{.}$ entre deux produits algébriques pour exprimer que p éléments du 1er ordre du premier produit formaient avec

p éléments analogues du second une combinaison scalaire sur le modèle du produit polaire, tandis que nous avons réservé le symbole)(de ce produit pour le cas où tous les éléments d'une des formes au moins entraient dans un tel produit.

En dehors des méthodes de Grassmann, Hamilton, ou de leurs disciples, la théorie des formes n'a guère considéré les opérateurs linéaires : homographies ou réciprocités, symboles de transformations quadratiques, etc. Il ne nous semble pas nécessaire de les traiter dans cette introduction.

Chapitre II.

Géométrie métrique des vecteurs du plan : produits de deux vecteurs.

Ce sont les points de la droite de l'infini du plan qu'on représente par les vecteurs. Les opérations de la géométrie métrique peuvent se définir à partir des seuls vecteurs réels, mais il est plus direct d'introduire dès le début des éléments imaginaires, à savoir les vecteurs isotropes (points cycliques) du plan.

Tandis que nous représenterons par u et v deux vecteurs égaux (que nous dirons unitaires) et rectangulaires, les vecteurs isotropes seront désignés par :

$$j_1 = u + \iota v \qquad j_2 = u - \iota v \qquad (\iota = \sqrt{-1})$$

Le *produit intérieur* de deux vecteurs a, b est dès lors défini par le produit polaire suivant [1] :

$$a \times b = ab \,)(\, j_1 j_2 = \frac{[aj_1][bj_2] + [aj_2][bj_1]}{2} \qquad (1)$$

Comme :

$$j_1 j_2 = u^2 + v^2$$

il peut aussi s'écrire, comme l'on sait :

$$a \times b = ab \,)(\, u^2 + v^2) = [au][bu] + [av][bv] \,. \qquad (2)$$

---

[1] Cf. R. Mehmke. *Vorlesungen über Punkt und Vektorenrechnung*, I, 1, p. 289.

Ses propriétés sont bien connues; nous rappellerons cependant qu'en conséquence de la définition, on a :

$$j_1^{\overset{2}{\times}} = j_2^{\overset{2}{\times}} = 0$$

et qu'un tel produit étant scalaire, on pose souvent, pour simplifier les calculs :

$$u^{\overset{2}{\times}} = v^{\overset{2}{\times}} = 1 = \frac{1}{2}(j_1 \times j_2) \qquad (3)$$

l'homogénéité rompue pouvant ensuite être rétablie au moyen de la même égalité (ce qui revient à calculer avec $\left.\frac{a \times b}{u^{\overset{2}{\times}}}\right)$.

Tandis que le produit algébrique de deux vecteurs ne s'annule qu'avec l'un de ses facteurs, il n'en est plus de même pour le produit intérieur. Il sera aussi toujours possible de résoudre une équation intérieure :

$$\pm x^{\overset{2}{\times}} = a \times b$$

Supposons, par exemple, $a \times b$ positif; l'équation peut s'écrire:

$$x^2 \,)(\, j_1 j_2 = ab \,)(\, j_1 j_2$$

et la division par $j_1 j_2$ est possible et donne :

$$x^2 = ab + \lambda_1 j_1^2 + \lambda_2 j_2^2$$

λ_1 et λ_2 étant deux paramètres indéterminés; ou encore:

$$x^2 = ab \qquad (\text{modules } j_1^2, j_2^2)$$

c'est-à-dire qu'on est ramené à une *équivalence algébrique*; nous utiliserons à plusieurs reprises ce mode de solution; si on veut poursuivre jusqu'au bout, il faut écrire :

$$x^2 \overset{2}{)(} = (ab + \lambda_1 j_1^2 + \lambda_2 j_2^2 \overset{2}{)(} = 0$$

équation scalaire de condition entre λ_1 et λ_2.

Ce produit intérieur de deux vecteurs aurait aussi pu être défini par :

$$a \times b = ab \Big)\Big(\frac{j_1^2 \cdot j_2^2}{[j_1 j_2]}$$

et pour plus de deux vecteurs on pourrait ainsi envisager diverses extensions du produit intérieur : mais aucune n'a semblé jusqu'ici s'imposer avec quelque utilité.

Arrivons à ce que Grassmann a appelé *produit complexe* de deux vecteurs, défini du reste seulement par des lois formelles. Non sans quelque hésitation, à cause des nombreuses acceptions du mot *complexe*, nous proposerons de substituer au terme usité par Grassmann celui de *produit cyclique*.

Entre deux vecteurs, nous définirons ce produit par l'expression :

$$a \smile b = \frac{1}{[j_1 j_2]^2}\Big((ab)(j_2^2) j_1^2 - (ab)(j_1^2) j_2^2\Big) \tag{4}$$

qui peut encore s'écrire :

$$a \smile b = \frac{2}{[j_1 j_2]} ab \cdot j_1 j_2 \,. \tag{5}$$

En effet, l'on a :

$$j_1 j_2 = \frac{j_1^2 \cdot j_2^2}{[j_1 j_2]}$$

et :

$$ab \cdot (j_1^2 \cdot j_2^2) = \frac{1}{2}\Big((ab)(j_2^2) j_1^2 - (ab)(j_1^2) j_2^2\Big) \,.$$

Pour développer $a \smile b$ sous la forme (5), il est commode d'employer la relation identique entre les quatre formes aj_1, aj_2, bj_1, bj_2 :

$$[aj_1] bj_2 - [aj_2] bj_1 = [bj_1] aj_2 - [bj_2] aj_1 \,. \tag{6}$$

On voit aussitôt que :

$$j_1 \smile j_2 = 0$$

et que le produit cyclique de deux vecteurs est une nouvelle forme quadratique, mais dépendant seulement de deux unités, par exemple j_1^2 et j_2^2 ; cette forme est en effet toujours apolaire (conjuguée) d'une part à $j_1 j_2$, d'autre part à la forme primitive, en vertu de:

$$ab \,.\, j_1 j_2 \,.\, j_1 j_2 = 0$$

$$ab \,.\, j_1 j_2 \,.\, ab = 0 \,.$$

Le produit cyclique de deux vecteurs représente donc le système des bissectrices du produit algébrique, avec un coefficient approprié. Nous dirons encore que $a \smile b$ est l'*orientante* de ab.

On a évidemment :

$$u^{\overset{2}{\smile}} = \frac{\iota}{[uv]} u^2 \,.\, (u^2 + v^2) = \iota uv$$

$$v^{\overset{2}{\smile}} = -\iota uv$$

donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{\overset{2}{\smile}} + v^{\overset{2}{\smile}} = 0 \\ u \smile v = v \smile u \end{array} \right. \qquad \text{ainsi que :} \qquad (7)$$

soit les règles énoncées par Grassmann.

Remarquons encore qu'*à l'exception du produit* $j_1 \smile j_2$, le produit cyclique ne s'annule qu'avec l'un de ses facteurs, et aussi qu'on peut toujouis satisfaire à l'équation :

$$x^{\overset{2}{\smile}} = a \smile b \qquad \text{ou :} \qquad (8)$$

$$x^2 \,.\, j_1 j_2 = ab \,.\, j_1 j_2 \,.$$

La division par $j_1 j_2$ est en effet possible et donne :

$$x^2 = ab + \lambda j_1 j_2$$

ou :

$$x^2 = ab \qquad (\text{module } j_1 j_2)$$

ce qui montre qu'à une équation cyclique (entre produits cycliques), on peut faire correspondre une *équivalence* ou congruence suivant le module $j_1 j_2$.

Quant au facteur indéterminé λ, sa valeur résulte de :

$$x^2 \overset{2}{)(} = (ab + \lambda j_1 j_2 \overset{2}{)(} = 0 \,.$$

Enfin, une équation cyclique, telle que (8.), peut aussi être remplacée par le système de deux équations scalaires :

$$\begin{cases} x^2 \,)(\, j_1^2 = ab \,)(\, j_1^2 \\ x^2 \,)(\, j_2^2 = ab \,)(\, j_2^2 \end{cases} \tag{9}$$

c'est-à-dire par un système d'équations écrites en coordonnées *symétriques*.

Nous allons maintenant établir diverses formules de réduction entre produits cycliques de deux vecteurs, montrant aussi leur lien avec le produit intérieur.

Ainsi le produit polaire de deux orientantes a pour expression:

$$a \smile b \,)(\, c \smile d = \frac{4}{[j_1 j_2]^2}(ab \,.\, j_1 j_2 \,)(\, cd \,.\, j_1 j_2)$$

se développant en :

$$= \frac{2}{[j_1 j_2]^2}\begin{vmatrix} ab \,)(\, cd & j_1 j_2 \,)(\, cd \\ ab \,)(\, j_1 j_2 & j_1 j_2 \,)(\, j_1 j_2 \end{vmatrix}$$

donc :

$$a \smile b \,)(\, c \smile d = -\, ab \,)(\, cd + \frac{1}{2}(a \times b)(c \times d) \,. \tag{10}$$

En particulier, l'équation : $a \smile b \,)(\, c \smile d = 0$ exprime en général que les bissectrices des couples ab et cd se bissectent mutuellement.

Une autre expression à considérer est :

$$a \smile b \,)(\, cd = \frac{2}{[j_1 j_2]} ab \,.\, j_1 j_2 \,.\, cd = -\, ab \,)(\, c \smile d \,.$$

Une telle expression, fonction linéaire de $a \smile b$ comme de $c \smile d$, est un produit particulier entre ces orientantes; c'est ce que nous allons retrouver ci-après. Remarquons d'abord que l'expression s'écrit aussi :

$$-\frac{2}{[j_1 j_2]}(ab \,.\, cd \,)(\, j_1 j_2 = -\,\iota(ab \,.\, cd)^{\times}$$

c'est-à-dire qu'elle représente à un facteur près l'invariant intérieur du jacobien de ab et cd. Donc l'équation :

$$(ab\,.\,cd)^{\times} = 0$$

signifie que les couples ab et cd ont mêmes bissectrices.

Or le jacobien de $a \smile b$ et $c \smile d$ représente évidemment $j_1 j_2$ affecté d'un certain coefficient : si celui-ci était nul, ab et cd auraient encore mêmes bissectrices, d'où :

$$a \smile b\,.\,c \smile d = \lambda (ab\,.\,cd)^{\times} j_1 j_2\ .$$

On détermine le coefficient λ en considérant en particulier :

$$j_1^{\smile 2}\,.\,j_2^{\smile 2} = \lambda (j_1^2\,.\,j_2^2)^{\times} j_1 j_2\ .$$

ce qui donne :

$$\lambda = -\frac{1}{2}\,,$$

d'où la formule:

$$a \smile b\,.\,c \smile d = -\frac{1}{2}(ab\,.\,cd)^{\times} j_1 j_2 \qquad (11)$$

et par suite aussi, en substituant le produit intérieur au produit algébrique :

$$\begin{aligned}(a \smile b\,.\,c \smile d)^{\times} &= -(ab\,.\,cd)^{\times} \qquad (12)\\ &= -\frac{[ac]b \times d + [bd]a \times c}{2}\end{aligned}$$

donc :

$$a \smile b\,)(\,cd = -\,ab\,)(\,c \smile d = \iota(a \smile b\,.\,c \smile d)^{\times} \qquad (13)$$

ce qui est bien, comme nous l'avons annoncé, une fonction linéaire d'un produit entre $a \smile b$ et $c \smile d$, donc un nouveau produit entre ces formes

Remarque. — Nous avons, dans ce qui précède, employé autant que possible des symboles d'opération; on est parfois amené à leur substituer des symboles fonctionnels. Ainsi, prendre l'orientante de ab peut être représenté par :

$$a \smile b = \mathcal{O}_2(ab$$

de sorte que l'orientante de cette nouvelle forme serait :

$$\mathcal{O}_2(a \smile b = \mathcal{O}_2(\mathcal{O}_2(ab = \mathcal{O}_2^{(2}(ab\ .$$

On vérifie du reste que l'on a :

$$\mathcal{O}_2^{(2}(ab = \frac{1}{[j_1 j_2]^2}\left((ab\,)(j_2^2)j_1^2 + (ab\,)(j_1^1)j_2^2\right)$$

donc:

$$\mathcal{O}_2^{(3}(ab = \mathcal{O}_2(ab$$

ce que l'on peut noter .

$$\mathcal{O}_2^{(3} = \mathcal{O}_2$$

et permet évidemment le calcul des puissances suivantes de l'opération $\mathcal{O}_2$.

Chapitre III.

Extension du produit cyclique au cas de n *vecteurs.*

Nous définirons comme *produit cyclique* de n vecteurs $a, b, c..l$ l'expression :

$$f^{\underset{\smile}{(n)}} = a \smile b \smile c \ldots \smile l = \frac{1}{[j_1 j_2]^n}\left((f^{(n)}\,)(j_2^n)j_1^n - (f^{(n)})(j_1^n)j_2^n\right) \qquad (1)$$

où on a posé :

$$f^{(n)} = abc \ldots l \,.$$

Cette forme, ou *orientante* de la forme initiale, est, elle aussi, algébrique et de degré n, mais ne dépend que de deux unités, par exemple j_1^n et j_2^n; elle est en effet apolaire à tout produit :

$$j_1^p j_2^{n-p} \qquad (p = 1, 2 \ldots, n-1)$$

et l'est aussi à la forme initiale $f^{(n)}$. On peut encore l'écrire sous forme d'un jacobien généralisé :

$$f^{\underset{\smile}{(n)}} = \theta_n f^{(n)} \,.\, j_1^{n-1} j_2 \,.\, j_1^{n-2} j_2^2 \ldots .\, j_1 j_2^{n-1} \qquad (2)$$

le coefficient θ_n pouvant se déterminer par le calcul de $j_1^{\underset{\smile}{n}}$, par exemple, ce qui donne :

$$\theta_n = \frac{C_n^1 C_n^2 \ldots C_n^{n-1}}{[j_1 j_2]^{\frac{n(n-1)}{2}}} \qquad (3)$$

le numérateur étant le produit des coefficients du binôme.

Comme pour le produit cyclique de deux vecteurs, on peut toujours résoudre l'équation binôme :

$$x^{\underset{\smile}{n}} = f^{\underset{\smile}{(n)}} \tag{4}$$

soit en la ramenant à l'équivalence :

$$x^n = f^{(n)} + \lambda_1 j_1^{n-1} j_2 \cdots + \lambda_{n-1} j_1 j_2^{n-1}$$

que nous écrirons de manière abrégée :

$$x^n = f^{(n)} \qquad \text{(module } j_1 j_2) \tag{5}$$

puis déterminant les coefficients λ par la condition que le premier membre soit une puissance n^{me} parfaite ; soit encore en la remplaçant par le système d'équations simultanées :

$$\left\{\begin{array}{l} x^n \,)(\, j_1^n = f^{(n)} \,)(\, j_1^n \\ x^n \,)(\, j_2^n = f^{(n)} \,)(\, j_2^n \end{array}\right. \tag{6}$$

Il résulte des considérations précédentes que les formes :

$$f^{(n)} \qquad \text{et} \qquad f^{(n)} + \lambda j_1 j_2 g^{(n-2)}$$

sont équivalentes pour le produit cyclique, quelle que soit la forme $g^{(n-2)}$ et aussi que les n solutions de l'équation binôme forment le faisceau régulier de n vecteurs que représente l'orientante $f^{\underset{\smile}{(n)}}$, faisceau apolaire au couple isotrope $j_1 j_2$.

On voit encore que les seuls produits cycliques qui sont nuls sans qu'un de leurs facteurs du premier ordre s'annule sont ceux qui admettent comme facteur (du second ordre) $j_1 \smile j_2$. C'est Laguerre qui a introduit la notion d'*orientation* (relative à un axe de repère u) d'un faisceau de directions; G. Humbert a désigné sous ce nom, pour la forme $abc\ldots l$ le coefficient :

$$(-1)^n \frac{abc \ldots l \,)(\, j_1^n}{abc \ldots l \,)(\, j_2^n} = (-1)^n \frac{\zeta_a \zeta_b \cdots \zeta_l}{\bar{\zeta}_a \bar{\zeta}_b \cdots \bar{\zeta}_l}$$

en coordonnées symétriques :

$$\zeta = \xi + \iota\eta$$
$$\bar{\zeta} = \xi - \iota\eta\ .$$

Nous pouvons sans inconvénient modifier la définition de Humbert en négligeant le facteur $(-1)^n$, de sorte que l'orientation sera définie par :

$$\omega = \frac{f^{(n)})(j_1^n}{f^{(n)})(j_2^n} \tag{7}$$

qui est le coefficient essentiel d'une orientante, d'équation :

$$(j_1^n - \omega j_2^n)(x^n = 0 .$$

Les propriétés des orientations résulteront donc immédiatement de celles des orientantes, c'est-à-dire du produit cyclique. Il est évident que celui-ci est commutatif, mais il nous reste à montrer ce qu'on pourra considérer comme la *propriété associative* du produit, bien que cette propriété soit toute autre que celle qu'on considère dans les systèmes *numériques* complexes; le même cas se présente déjà, du reste, pour le produit extérieur de Grassmann.

Nous allons établir que si une forme $f^{(n)}$ est le produit algébrique de formes d'ordre moindre, telles que $g^{(p)}$, l'orientante $\underset{\smile}{f^{(n)}}$ est un produit des orientantes $\underset{\smile}{g^{(p)}}$, et pour le produit ainsi défini nous conserverons le signe $\smile$ du produit cyclique.

Nous remarquerons d'abord que si deux formes orientantes :

$$a^{(p)} = \alpha_1 j_1^p - \alpha_2 j_2^p$$

$$a'^{(p)} = \alpha_1 j_1^p + \alpha_2 j_2^p$$

diffèrent par le signe du coefficient de j_2^p, c'est-à-dire ont des orientations opposées, la seconde est fonction linéaire de la première — et inversement — le symbole de cette fonction ne dépendant pas de la forme considérée.

En effet :

$$a^{(p)})(j_2^p = \alpha_1 [j_1 j_2]^p$$

$$a^{(p)})(j_1^p = - \alpha_2 [j_2 j_1]^p$$

donc :

$$a'^{(p)} = \frac{1}{[j_1 j_2]^p} \left((a^{(p)})(j_2^p) j_1^p - (-1)^p (a^{(p)})(j_1^p) j_2^p \right) = \mathfrak{A}_p (a^{(p)} . \tag{8}$$

Supposons maintenant :

$$f^{(n)} = g^{(p)}\, h^{(q)} \qquad (p + q = n)$$

$$[j_1 j_2]^n f^{\underset{\smile}{(n)}} = \varphi_1 j_1^n - \varphi_2 j_2^n$$

$$[j_1 j_2]^p g^{\underset{\smile}{(p)}} = \gamma_1 j_1^p - \gamma_2 j_2^p$$

$$[j_1 j_2]^q h^{\underset{\smile}{(q)}} = \eta_1 j_1^q - \eta_2 j_2^q$$

avec :

$$\varphi_1 = f^{(n)} \,)(\, j_2^n = \left(g^{(p)} \,)(\, j_2^p\right)\left(h^{(q)} \,)(\, j_2^q\right) = \gamma_1 \eta_1$$

$$\varphi_2 = \gamma_2 \eta_2$$

donc :

$$[j_1 j_2]^n f^{\underset{\smile}{(n)}} = \gamma_1 j_1^p \eta_1 j_1^q - \gamma_2 j_2^p \eta_2 j_2^q \; .$$

Le second membre est de la forme :

$$A_1 B_1 - A_2 B_2 = \frac{1}{2}\left[(A_1 - A_2)(B_1 + B_2) + (B_1 - B_2)(A_1 + A_2)\right]$$

donc :

$$f^{\underset{\smile}{(n)}} = \frac{1}{2}\left(g^{\underset{\smile}{(p)}}\, \mathcal{A}_q(h^{\underset{\smile}{(q)}}) + h^{\underset{\smile}{(q)}}\, \mathcal{A}_p(g^{\underset{\smile}{(p)}})\right) = g^{\underset{\smile}{(p)}} \smile h^{\underset{\smile}{(q)}} \qquad (9)$$

et comme on a vu en même temps :

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cdot \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

l'orientation de $f^{(n)}$ est aussi le produit des orientations de $g^{(p)}$ et $h^{(q)}$.

Remarque. — L'opération linéaire $\mathcal{A}_p$ précédemment employée *sur une orientante* est reliée simplement à l'opération $\mathcal{O}_p$ qui donne l'orientante d'une forme d'ordre p. On a, en effet, quelle que soit la parité de p :

$$\mathcal{O}_p = \mathcal{A}_p^{(2}$$

mais si p est pair, on a plus simplement :

$$\mathcal{O}_p = \mathcal{A}_p \; .$$

CHAPITRE IV.

Les similitudes vectorielles[1] *du plan et leur produit fonctionnel. Isomorphisme de ce produit et du produit cyclique des vecteurs.*

On désigne sous le nom de similitudes vectorielles les homographies du plan qui, appliquées à un vecteur, le font tourner d'un angle défini et altèrent en outre sa longueur dans un rapport déterminé. Comme il est bien connu, ces similitudes ont fourni la première représentation géométrique des nombres complexes. Nous noterons ici par $)\frac{b}{a}$ l'opérateur qui, appliqué à a, le transforme en b par une opération de la nature indiquée, donc :

$$\mathcal{H}(a =)\frac{b}{a}(a = b\ . \tag{1}$$

Si on définit en particulier l'opération identique $\mathfrak{U}$ (qu'on se contente en général d'écrire 1), et le verseur droit $\mathcal{I}$, toute autre similitude $\mathcal{H}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{H} = \lambda\mathfrak{U} + \mu\mathcal{I} \tag{2}$$

c'est-à-dire que :

$$\mathcal{H}(a = \lambda\mathfrak{U}(a + \mu\mathcal{I}(a$$

quel que soit a.

Nous rappelons encore que le *produit fonctionnel* ou *séquence* de deux opérateurs $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ est défini par :

$$\mathcal{H}(\mathcal{H}'(a \tag{3}$$

de sorte que nous utiliserons pour lui le même symbole (c'est-à-dire la demi-parenthèse que nous employons aussi pour séparer l'opérateur de l'objet).

Les similitudes du plan formant un système linéaire à deux

---

[1] Cf. C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO. *Analyse vectorielle générale*, I. Transformations linéaires, p. 47.

unités: $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{J}$, on sait qu'elles satisfont à l'équation fondamentale de Hamilton-Cayley :

$$\mathcal{H}^{(2} - 2\alpha\mathcal{H} + \beta = 0 \tag{4}$$

ou :

$$\mathcal{H}^{(2} - 2\alpha\mathcal{H}(\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{U}^{(2} = 0$$

Les coefficients α et β de cette équation étant donnés par[1]:

$$\left\{\begin{array}{l} 2\alpha[ab] = 2[\mathcal{H}\mathfrak{U}][ab] = [\mathcal{H}a \,.\, b] + [a \,.\, \mathcal{H}b] \\ \beta[ab] = \mathcal{H}^{\mathrm{II}}[ab] = [\mathcal{H}a \,.\, \mathcal{H}b] \,. \end{array}\right. \tag{5}$$

Le produit fonctionnel des opérateurs étant associatif, on peut déduire toutes ses propriétés de l'équation de Hamilton-Cayley relative à $\mathfrak{J}$, à savoir :

$$\mathfrak{J}^{(2} + \mathfrak{U}^{(2} = 0 \tag{6}$$

à laquelle il convient de joindre :

$$\mathfrak{J}(\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\mathfrak{J}(= \mathfrak{J}) \,. \tag{6}$$

Soit u un vecteur unitaire, v un vecteur unitaire perpendiculaire. Avec la notation indiquée, on a :

$$\mathfrak{U} =)\frac{u}{u} \qquad \mathfrak{J} =)\frac{v}{u}$$

donc :

$$\left\{\begin{array}{l} \left()\frac{u}{u}\right)^{(2} + \left()\frac{v}{u}\right)^{(2} = 0 \\ )\frac{u}{u}\Big()\frac{v}{u} =)\frac{v}{u}\Big()\frac{u}{u} \end{array}\right. \tag{7}$$

équations qu'on peut rapprocher de celles qui sont à la base du produit cyclique des vecteurs:

$$\left\{\begin{array}{l} u\overset{2}{\smile} + v\overset{2}{\smile} = 0 \\ u \smile v = v \smile u \end{array}\right. \tag{8}$$

et qui montrent l'isomorphisme des deux produits soumis aux mêmes lois formelles. Mais cet isomorphisme est ici très intime,

[1] Cf. R. MEHMKE. *Vorlesungen über Punkt und Vektorenrechnung*, I, 1, p. 320.

en ce sens que les produits précédents peuvent en somme « *se substituer l'un à l'autre en toute proportion* ».

Nous commencerons cependant par montrer que l'orientante d'une forme est bien définie indépendamment de toute direction de repère, malgré qu'il y figure les vecteurs isotropes j_1 et j_2 définis à partir de u et v.

Soit en effet:

$$u' = \cos\varphi u + \sin\varphi v$$

$$v' = -\sin\varphi u + \cos\varphi v \ .$$

Posons:

$$j'_1 = u' + \iota v' \qquad j'_2 = u' - \iota v' \ .$$

On voit que:

$$j'_1 = e^{-\iota\varphi} j_1 \qquad j'_2 = e^{\iota\varphi} j_2 \ .$$

On savait bien que l'ombilicale était indépendante de toute rotation des axes, c'est-à-dire:

$$j'_1 j'_2 = j_1 j_2 \ .$$

On voit en outre qu'on a aussi:

$$\frac{1}{[j_1 j_2]^n}\left((f^{(n)})(j_2^n) j_1^n - (f^{(n)})(j_1^n) j_2^n\right)$$
$$= \frac{1}{[j'_1 j'_2]^n}\left((f^{(n)})(j_2'^n) j_1'^n - (f^{(n)})(j_1'^n) j_2'^n\right)$$

c'est-à-dire que les produits cycliques sont bien définis de façon *absolue*.

Soit maintenant une forme:

$$f^{(n)} = abc \ldots l$$

évidemment indifférente à l'effet de l'opération identique $\mathfrak{U}$ sur un de ses facteurs; il en sera de même de son orientante.

Agissons ensuite avec le verseur droit $\mathfrak{J}$ sur un des facteurs de $f^{(n)}$, a par exemple, et voyons l'effet produit sur l'orientante. Il est évidemment permis de supposer a unitaire, et par suite de supposer a identique au vecteur u à partir duquel nous avons construit la forme orientante.

Alors:

$$[aj_2] = -\iota[a\mathcal{J}a] \qquad [aj_1] = \iota[a\mathcal{J}a]$$

et après la rotation:

$$[\mathcal{J}a\,.\,j_2] = [\mathcal{J}a\,.\,a] \qquad [\mathcal{J}a\,.\,j_1] = [\mathcal{J}a\,.\,a]$$

$$[\mathcal{J}a\,.\,j_2] = -\iota[aj_2] \qquad [\mathcal{J}a\,.\,j_1] = \iota[aj_1]\,.$$

Par suite, si:

$$a \smile b \smile c \ldots \smile l = \varphi_1 j_1^n - \varphi_2 j_2^n \tag{9}$$

$$\mathcal{J}a \smile b \smile c \ldots \smile l = -\iota(\varphi_1 j_1^n + \varphi_2 j_2^n)\,. \tag{10}$$

Quel que soit le facteur de $f^{(n)}$ sur lequel on aurait opéré, on serait arrivé au même résultat, ce qui montre que l'opération $\mathcal{J}$ est permutable avec les facteurs du produit cyclique; comme cela a lieu aussi pour la multiplication par un nombre et l'opération $\mathcal{U}$, cela est général pour toute similitude $\mathcal{H}$, et on pourra écrire:

$$\mathcal{H}(a \smile b \smile \ldots \smile l = \mathcal{H}a \smile b \smile c \ldots \smile l = \ldots = a \smile b \ldots \smile \mathcal{H}l \tag{11}$$

En particulier si:

$$a \smile b \ldots \smile l = x^{\overset{n}{\smile}}$$

on aura:

$$\mathcal{H}(x^{\overset{n}{\smile}} = \left(\mathcal{H}^{\left(\frac{1}{n}\right.}x\right)^{\overset{n}{\smile}} = \mathcal{H}^{\left(\frac{1}{n}\right.}a \smile \mathcal{H}^{\left(\frac{1}{n}\right.}b \ldots \smile \mathcal{H}^{\left(\frac{1}{n}\right.}l$$

c'est-à-dire que l'effet de l'opération $\mathcal{H}$ sur une orientante peut être réparti uniformément sur tous les facteurs de celle-ci, et ceci quelle que soit la détermination prise pour $\mathcal{H}^{\left(\frac{1}{n}\right.}$; autrement dit, faire subir la rotation φ à un facteur d'un produit $f^{(n)}$ revient à faire tourner l'orientante de cette forme de l'angle $\frac{\varphi}{n}$.

De même, si des similitudes $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$, ... etc. ont opéré sur divers émélents de $f^{(n)}$, le résultat réalisé sur l'orientante pourra simplement s'écrire:

$$\mathcal{H}(\mathcal{K}(\ldots(a \smile b \ldots \smile l\,.$$

Soit maintenant une équation cyclique:

$$a \smile b \smile \ldots \smile l = a' \smile b' \ldots \smile l'\,.$$

Dans ce système, la division par a' est possible [1] au second membre, donc au premier, et donne:

$$)\frac{a \smile b \dots \smile l}{a'} = b' \smile \dots \smile l'$$

qu'on peut encore écrire:

$$)\frac{a}{a'}(b \smile c \dots \smile l = b' \smile c' \dots \smile l' \, .$$

Et comme on peut du reste faire apparaître au second membre un facteur quelconque u, en écrivant par exemple:

$$a' =)\frac{a'}{u}(u$$

on pourra en général diviser les deux membres d'une équation cyclique par tel facteur qu'on voudra, en susbtituant ainsi à chaque fois une similitude à un vecteur; de même qu'on pourra s'arrêter après un certain nombre de ces opérations, ayant ainsi ramené l'équation:

$$a \smile b \dots \smile l = a' \smile b' \dots \smile l'$$

à une forme:

$$p \smile q \smile r = p' \smile q' \smile r'$$

par exemple.

On pourra également faire les opérations inverses en multipliant par des vecteurs. Il n'y a donc qu'une différence d'*interprétation* entre les équations entre orientantes et celles entre similitudes; on voit en outre que de nombreuses opérations intermédiaires sont possibles, qui donnent facilement autant d'énoncés géométriques.

Remarquons encore que l'orientante d'un vecteur est ce vecteur lui-même et qu'on peut pousser les divisions par des vecteurs dans le système du produit cyclique au delà des similitudes et envisager des opérateurs tels que:

$$)\frac{1}{a \smile b \smile \dots \smile l}$$

[1] J'ai déjà employé cette méthode dans un cas particulier. *Enseignement mathématique*, XXII, 3.

qui, agissant sur un produit de $n + 1$ facteurs, redonnent un vecteur, soit:

$$)\frac{1}{a \smile b \ldots \smile l}(a' \smile b' \ldots \smile l' \smile m' = m \ .$$

Nous verrons un peu plus tard comment on peut transformer ces opérateurs.

Remarque. Nous avons, chemin faisant, remarqué que l'opération $\mathcal{J}$, appliquée à une orientante:

$$\varphi_1 j_1^n - \varphi_2 j_2^n$$

la transformait en:

$$- \iota(\varphi_1 j_1^n + \varphi_2 j_2^n) \ .$$

Ceci donne un sens plus précis aux opérations $\mathcal{A}_n$ précédemment employées:

$$\mathcal{A}_n = \iota\mathcal{J} \tag{12}$$

et montre que l'opération $\mathcal{A}_n$ est indépendante de son indice n.

En outre, la formule fondamentale (9) ch. III, devient:

$$f^{\underset{\smile}{(n)}} = \frac{\iota}{2}\left(g^{\underset{\smile}{(p)}}\mathcal{J}h^{\underset{\smile}{(q)}} + h^{\underset{\smile}{(q)}}\mathcal{J}g^{\underset{\smile}{(p)}}\right) = g^{\underset{\smile}{(p)}} \smile h^{\underset{\smile}{(q)}} \ . \tag{13}$$

Chapitre V

Nouveaux développements sur les similitudes. Anti-similitudes et affinités.

On sait qu'à une similitude:

$$\mathcal{H} = \lambda\mathcal{U} + \mu\mathcal{J}$$

on peut adjoindre la similitude conjuguée:

$$\mathbf{K}\mathcal{H} = \overline{\mathcal{H}} = \lambda\mathcal{U} - \mu\mathcal{J}$$

qui a même équation fondamentale que $\mathcal{H}$, comme cela résulte de l'égalité des invariants:

$$\begin{cases} [\mathcal{U}\overline{\mathcal{H}}] = [\mathcal{U}\mathcal{H}] = \lambda \\ \overline{\mathcal{H}}^{\text{II}} = \mathcal{H}^{\text{II}} = \lambda^2 + \mu^2 \qquad \text{(norme de } \mathcal{H}) \end{cases}$$

invariants qui sont aussi donnés par:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\mathcal{H} + \overline{\mathcal{H}}) = \lambda \\ \mathcal{H}(\overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{H}}(\mathcal{H} = \lambda^2 + \mu^2 \end{cases}$$

si on accepte de représenter par 1 l'opération identique.

Supposons maintenant:

$$\mathcal{H} =)\frac{b}{a} \qquad \overline{\mathcal{H}} = \frac{b^{\overset{2}{\times}}}{a^{\overset{2}{\times}}})\frac{a}{b}$$

donc :

$$\mathcal{H}^{\text{II}} = \frac{b^{\overset{2}{\times}}}{a^{\overset{2}{\times}}} \,. \tag{1}$$

Puis, comme :

$$b = \mathcal{H} a = \lambda a + \mu \mathcal{I} a$$

$$a \times b = \lambda a^{\overset{2}{\times}} \,.$$

On trouve d'autre part:

$$\lambda = [\mathfrak{U}\mathcal{H}] =)\frac{b}{a} + \frac{b^{\overset{2}{\times}}}{a^{\overset{2}{\times}}})\frac{a}{b} =)\frac{a^{\overset{2}{\times}} b^{\overset{2}{\smile}} + b^{\overset{2}{\times}} a^{\overset{2}{\smile}}}{a^{\overset{2}{\times}}\, a \smile b} = \frac{a \times b}{a^{\overset{2}{\times}}} \tag{2}$$

ce qui donne la relation identique entre les trois orientantes $a^{\overset{2}{\smile}}$, $a \smile b$, $b^{\overset{2}{\smile}}$:

$$a^{\overset{2}{\times}} b^{\overset{2}{\smile}} - 2(a \times b)\, a \smile b + b^{\overset{2}{\times}} a^{\overset{2}{\smile}} = 0 \tag{3}$$

qui n'est qu'une autre forme de la relation fondamentale à laquelle satisfait $\mathcal{H}$:

$$)\frac{b^{\overset{2}{\smile}}}{a^{\overset{2}{\smile}}} - 2\frac{a \times b}{a^{\overset{2}{\times}}})\frac{b}{a} + \frac{b^{\overset{2}{\times}}}{a^{\overset{2}{\times}}} = 0 \,. \tag{4}$$

A côté des similitudes, qui transforment une figure en une autre directement semblable, nous allons étudier les *anti-similitudes* (comprenant les anti-rotations), transformant une figure en une autre inversement semblable.

Il est pour cela commode d'introduire la notion de vecteur *inverse* d'un vecteur donné, que nous définirons et représenterons ici par:

$$\bar{x} = \frac{x}{x^{\overset{2}{\times}}}$$

et inversement:

$$x = \frac{\bar{x}}{\bar{x}^{\overset{2}{\times}}} .$$

La similitude conjuguée de:

$$\mathcal{H} = \Big)\frac{b}{a}$$

sera alors:

$$\bar{\mathcal{H}} = \Big)\frac{\bar{a}}{\bar{b}} .$$

Supposons maintenant que des vecteurs a, x soient transformés par une anti-similitude $\mathfrak{P}$ en vecteurs b, y. On doit avoir:

$$\Big)\frac{y}{b} = \mathbf{K}\Big)\frac{x}{a} = \Big)\frac{\bar{a}}{\bar{x}}$$

donc:

$$y = \mathfrak{P}x = \Big)\frac{b \smile \bar{a}}{\bar{x}}$$

et le numérateur pourrait du reste s'abréger en $e^{\overset{2}{\smile}}$. Il serait facile de montrer que la séquence de deux anti-similitudes est une similitude, comme de calculer les invariants de ces opérateurs. Mais nous n'avons là que des cas particuliers des homographies vectorielles du plan, ou affinités.

Nous allons montrer que, réciproquement, toute affinité plane peut-être décomposée en la somme d'une similitude et d'une anti-similitude. Nous rappelons à ce sujet qu'une homographie vectorielle, mise sous forme d'un rapport extensif, peut être transformée en une forme dyadique, c'est-à-dire en une somme de dyades.

Soit:

$$\mathfrak{A} = \big\{ b\,,\ \bar{a} \big\} \tag{5}$$

une telle dyade qui, par définition, transforme un vecteur x de la manière suivante:

$$y = \mathcal{A} x = \left\{ b \, , \, \bar{a} \right\} (x = (\bar{a} \times x) b \, .$$

Il nous suffira évidemment de faire la démonstration indiquée sur la dyade $\mathcal{A}$. Or on peut écrire:

$$2\mathcal{A} = \left\{ b \, , \, \bar{a} + \mathcal{J} b \, , \, \mathcal{J} \bar{a} \right\} + \left\{ b \, , \, \bar{a} - \mathcal{J} b \, , \, \mathcal{J} \bar{a} \right\} . \qquad (6)$$

Le premier opérateur

$$\left\{ b \, , \, \bar{a} + \mathcal{J} b \, , \, \mathcal{J} \bar{a} \right\}$$

transforme les vecteurs a et $\mathcal{J}a$ respectivement en b et $\mathcal{J}b$. C'est donc une similitude:

$$\mathcal{S} = \left\{ b \, , \, \bar{a} + \mathcal{J} b \, , \, \mathcal{J} \bar{a} \right\} = \frac{b \, , \, \mathcal{J} b}{a \, , \, \mathcal{J} a} =)\frac{b}{a} \, .$$

Le second opérateur

$$\left\{ b \, , \, \bar{a} - \mathcal{J} b \, , \, \mathcal{J} \bar{a} \right\}$$

transforme a et $\mathcal{J}a$ en b et $-\mathcal{J}b$; c'est donc bien l'anti-similitude $\mathfrak{T}$ précédemment définie, donc:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} (\mathcal{S} + \mathfrak{T})$$

décomposition aussi remarquable pour les propriétés métriques que la décomposition en parties symétrique et gauche pour les propriétés affines.

On définirait aussi simplement des opérateurs non-linéaires réalisant l'inversion et la sym-inversion (inversion symétrique), qui, par leurs séquences, reproduisent les similitudes directes et inverses. Nous les formerons directement dans les applications quand ils nous seront utiles.

Remarque. — Une anti-similitude est une transformation involutive, qui coïncide avec sa conjuguée, et dont l'équation fondamentale est:

$$\mathfrak{T}^{(2} = - \mathfrak{T}^{\mathrm{II}} \, .$$

Quels que soient les vecteurs a et b, on a :

$$\mathcal{T}a \times \mathcal{T}b = \alpha a \times b$$

et nous pouvons écrire la constante α sous la forme $\mathcal{T}^{\overset{2}{\times}}$, donc :

$$\mathcal{T}a \times \mathcal{T}b = \mathcal{T}^{\overset{2}{\times}} a \times b \ . \tag{7}$$

On voit immédiatement que :

$$\mathcal{T}^{\overset{2}{\times}} = -\mathcal{T}^{\mathrm{II}} \ . \tag{8}$$

Pour une similitude, au contraire, en définissant $\mathcal{H}^{\overset{2}{\times}}$ par :

$$\mathcal{H}a \times \mathcal{H}b = \mathcal{H}^{\overset{2}{\times}} a \times b \tag{9}$$

on aurait :

$$\mathcal{H}^{\overset{2}{\times}} = \mathcal{H}^{\mathrm{II}} \ . \tag{10}$$

Ces relations (8) et (10) expriment toutes deux que l'homographie considérée est telle que le produit $\mathcal{A}(\overline{\mathcal{A}}$ est un opérateur numérique [1].

Ajoutons, en ce qui concerne les homographies $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ que la relation fondamentale n'est qu'un cas particulier de l'équation :

$$\frac{1}{2}\left(\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{B}(\mathcal{A}\right) - [\mathcal{U}\mathcal{B}]\mathcal{A} - [\mathcal{U}\mathcal{A}]\mathcal{B} + [\mathcal{A}\mathcal{B}]\mathcal{U} = 0 \tag{11}$$

identité entre cinq homographies vectorielles du plan.

Pour les similitudes ou anti-similitudes, on peut remplacer les coefficients de cette équation par des expressions telles que $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ défini par :

$$2(\mathcal{A} \times \mathcal{B})a \times b = (\mathcal{A}a \times \mathcal{B}b) + (\mathcal{A}b \times \mathcal{B}a) \ . \tag{12}$$

---

[1] Cf. C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO. *Analyse vectorielle générale*, I. Transformations linéaires, p. 47.

Chapitre VI

Extension du produit intérieur aux points et segments. Système linéaire des cercles du plan.

Nous avons là encore besoin de quelques notions de calcul géométrique pour écrire les relations projectives entre les divers éléments du plan: points, segments (droites), et leurs produits algébriques. Nous allons très brièvement citer l'indispensable pour préciser nos notations.

Les points du plan — y compris les vecteurs — dépendent linéairement de trois unités. Par le produit *extérieur*, on définit:

$$[ab] = -[ba]$$

(ou encore $\overline{ab}$ ou $a.b$), qui n'est plus ici un scalaire, mais un nouvel élément appelé *segment* (orienté), puis:

$$[abc] = [bca] = [cab] = -[bac] = -[acb] = -[cba]$$

(ou encore $\overline{abc}$, $a.b.c$) élément scalaire mesurant deux fois l'aire orientée du triangle *abc*. Les segments dépendent eux aussi de $\frac{3(3-1)}{2} = 3$ unités et forment un nouveau système linéaire, complémentaire de celui des points. Leurs produits extérieurs redonnent le point et l'aire orientée. Les segments considérés en tant qu'éléments seront représentés par des grandes lettres A, B, etc.

En géométrie affine, on distingue le système des vecteurs, ou points de la droite de l'infini $J = [uv]$; avec un point a quelconque, cette droite détermine un invariant, la *masse* du point $\alpha = [aJ]$; la masse d'un vecteur est nulle.

A un segment $A = [ab]$ appartient un vecteur déterminé:

$$[A \,.\, J] = [aJ]b - [bJ]a$$

de sorte que si les points a et b sont de masse 1, ce vecteur s'écrit:

$$b - a$$

Nous représenterons encore par $\overrightarrow{ab}$ le vecteur d'un segment $\overline{ab}$, puisqu'il s'agit là d'un produit entre les points a et b et le bivecteur J.

Remarquons que le vecteur d'un bivecteur λJ est nul. Les produits algébriques de points définissent des formes de divers degrés ou classes; il en est de même des produits algébriques de droites (ou segments) qui définissent des formes d'ordres divers. Combinées entre elles par des produits convenables, ces formes donnent des combinaisons scalaires. Nous considérerons entre formes de même classe les produits construits sur les modèles suivants:

polaire $$a^2)(b^2 = b^2)(a^2 = [ab]^2$$

$$A^2)(B^2 = B^2)(A^2 = [A \,.\, B]^2$$

puis:

$$a^2)(b^2)(c^2 = \ldots = [abc]^2$$

$$A^2)(B^2)(C^2 = \ldots = [ABC]^2$$

et de même pour les formes d'ordres supérieurs.

Ainsi, $f^{(3)}$ représentant une courbe de 3e classe, X une droite variable, l'équation tangentielle de la courbe est:

$$f^{(3)})(X^3 = 0$$

de sorte que si la droite X contient un point fixe m et un point variable x, cette équation s'écrivant:

$$f^{(3)})(m^3)(x^3 = 0$$

$f^{(3)})(m^3$ représente la courbe de 3e ordre formée par les tangentes menées de m à $f^{(3)}$.

De même, entre des formes contrevariantes de degrés différents $f^{(n)}$ et $G^{(p)}$, si n est supérieur à p, par exemple:

$$f^{(n)})(G^{(p)}$$

est une forme de classe n-p; si elle est identiquement nulle, $G^{(p)}$ est apolaire à $f^{(n)}$.

Des produits de forme:

$$f^{(n)} \overset{r}{.}\, g^{(p)} = \Sigma [ab]^r a^{n-r} b^{p-r}$$

$$f^{(n)} \overset{r}{.}\, G^{(p)} = \Sigma [aB]^r a^{n-r} B^{p-r}$$

définissent des formes *mixtes* dont nous nous servirons le moins possible. Cependant le produit:

$$\textit{jacobien}\ \text{généralisé}\quad [a^{(n)} \,.\, b^{(n)} \,.\, c^{(n)} \ldots] \quad \text{ou} \quad a^{(n)} \,.\, b^{(n)} \,.\, c^{(n)} \ldots$$

conserve la propriété simple d'exprimer, quand il est nul, que les formes $a^{(n)}$, $b^{(n)}$, etc., sont liées par une relation linéaire à coefficients numériques.

En géométrie métrique, nous ferons usage, au moins pour l'exposition, des vecteurs isotropes j_1 et j_2 précédemment utilisés, et entre deux droites A et B nous définirons le *produit intérieur*:

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{AB}\ )(\ j_1 j_2 \tag{1}$$

(ou, si l'on préfère, le quotient de l'expression précédente par $u\overset{2}{\times}$). On peut du reste toujours, s'il s'agit de géométrie affine ou métrique, supposer que les points qui définissent les droites sont de masse unité — en tenant compte de la *loi de conservation des masses* — et nous le ferons désormais. En conséquence, soient m et n des points de A et B, a et b les vecteurs de ces segments.

$$\mathrm{A} = \overline{ma} \qquad \mathrm{B} = \overline{nb}$$

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = a \times b \qquad \text{ou} \qquad \overline{ma} \times \overline{nb} = \overrightarrow{ma} \times \overrightarrow{nb}$$

c'est-à-dire que le *produit intérieur de deux segments est égal à celui de leurs vecteurs.*

Nous allons maintenant définir le *produit intérieur de deux points*, soient m et n.

$$m \times n = mn\ )(\ j_1 j_2 = \frac{1}{2}\Big([mj_1][nj_2] + [mj_2][nj_1]\Big)\ . \tag{2}$$

Ce produit intérieur est donc une forme du second ordre, d'équation:

$$mn\ )(\ j_1 j_2\ )(\ x^2 = 0\ .$$

Comme cette équation exprime aussi:

$$mn\ )(\ x^2\ )(\ j_1 j_2 = \overline{mx}\,\overline{nx}\ )(\ j_1 j_2 = \overline{mx} \times \overline{nx} = 0$$

la forme $m \times n$ est le cercle de diamètre m, n.

Plus généralement, à une forme de 2e classe $f^{(2)}$ appartient ainsi une forme intérieure:

$$\overset{(2)}{f^{\times}} = f^{(2)})(j_1 j_2 \tag{3}$$

et qui est le cercle de Monge (orthoptique) de la courbe de seconde classe représentée par $f^{(2)}$.

Une forme ma, où a est un vecteur (et plus généralement une conique tangente à la droite de l'infini) donnera naissance à la forme intérieure:

$$m \times a$$

qui représente la droite menée en m perpendiculairement au vecteur a (ou une droite de Monge).

Les cercles, droites, et le produit intérieur de deux vecteurs, qui représente la droite de l'infini, forment un système linéaire à quatre unités— dans lequel les droites forment un système à trois unités. Ce système a été maintes fois étudié, soit au moyen des coordonnées quadri-circulaires, soit par les méthodes de Grassmann [1], bien qu'on ait jusqu'ici rarement accepté la définition du produit intérieur des points, à laquelle nous pensons rendre ici sa place.

Si o, u, v sont un point quelconque du plan et deux vecteurs unitaires rectangulaires, ce produit obéit aux lois formelles:

$$o \times u = u \times o \qquad o \times v = v \times o$$

$$u \times v = v \times u = 0 \qquad \overset{2}{u^{\times}} = \overset{2}{v^{\times}}$$

d'où les quatre unités du système:

$$\overset{2}{o^{\times}}, \quad o \times u, \quad o \times v, \quad \overset{2}{u^{\times}}$$

Si m est un élément quelconque, point ou vecteur, toute forme intérieure $\Sigma\mu \overset{2}{m^{\times}}$ peut être, d'une infinité de manières, réduite à un produit de deux éléments. Soit en effet à résoudre:

$$\Sigma\mu \overset{2}{m^{\times}} = x \times y \tag{4}$$

[1] Cf. par exemple, E. Muller. *Die Kugelgeometrie nach den Principien der Grassmann'schen Ausdehnungslehre-Monatshefte f. Math. u. Phys.* III, IV.

On peut remplacer cette équation par l'équivalence:

$$\Sigma\mu\, m^2 = xy + \lambda_1 \overset{2}{j}_1 + \lambda_2 \overset{2}{j}_2 \tag{5}$$

ou:

$$\Sigma\mu\, m^2 = xy \qquad \left(\text{modules } \overset{2}{j}_1 \;,\; \overset{2}{j}_2\right)$$

La première polaire de la droite de l'infini:

$$\Sigma\mu\, m = \Sigma\mu\, m^2 \;)(\; \mathrm{J} = xy \;)(\; \mathrm{J} = \frac{1}{2}(x + y)$$

détermine le centre à distance finie ou infinie; la combinaison polaire $\Sigma\mu\, m^2 \;)(\; \mathrm{J}^2$ aurait de même exprimé la conservation des masses, que nous avons supposée réalisée: $\Sigma\mu = 1$.

On peut ensuite, soit résoudre l'équivalence, soit former l'équation du 2e degré ayant les séries de racines x, y et qui est:

$$x^{\overset{2}{\times}} - 2\,\Sigma\mu\, m \times x + \Sigma\mu\, m^{\overset{2}{\times}} = 0$$

d'où:

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \Sigma\mu\, m \pm \sqrt{(\Sigma\mu\, m)^{\overset{2}{\times}} - \Sigma\mu\, m^{\overset{2}{\times}}} = o \pm \rho \sqrt{u^{\overset{2}{\times}}}$$

si o est le centre du cercle, ρ son rayon réel ou imaginaire.

On aurait une résolution analogue dans le cas d'une droite à distance finie ou infinie.

L'emploi de l'équivalence (5) a montré qu'une forme intérieure est en réalité attachée à un réseau de formes de 2e classe.

Dans le système des cercles, on sait former de nouveau des produits extérieur et intérieur. Nous définirons directement ce dernier de la façon suivante; l'expression:

$$f^{(2)} \;)(\; j_1 j_2 \;)(\; g^{(2)} = f^{\overset{(2)}{\times}} \;)(\; g^{(2)} = f^{(2)} \;)(\; g^{\overset{(2)}{\times}}$$

est une fonction linéaire de chacune des formes intérieures $f^{\overset{(2)}{\times}}$ et $g^{\overset{(2)}{\times}}$, et on peut montrer qu'elle coïncide avec ce produit intérieur (qu'on peut définir à un facteur constant près). C'est elle que nous choisirons comme *produit intérieur de deux cercles* (ou droites) et représenterons par:

$$f^{\overset{(2)}{\times}} \,\Big|\, g^{\overset{(2)}{\times}} = f^{(2)} \;)(\; g^{(2)} \;)(\; j_1 j_2 \tag{6}$$

On sait que cette expression est la puissance mutuelle de deux circonférences; le calcul est du reste aisé:

$$\varpi = \left(o^{\overset{2}{\times}} - \rho^2 u^{\overset{2}{\times}}\right) \Big| \left(o^{\overset{\prime 2}{\times}} - \rho'^2 u^{\overset{2}{\times}}\right) = o^{\overset{2}{\times}} \Big| o^{\overset{\prime 2}{\times}} - u^{\overset{2}{\times}} \Big| \left(\rho^2 o^{\overset{\prime 2}{\times}} + \rho'^2 o^{\overset{2}{\times}}\right)$$

$$= \overline{oo'}^{\overset{2}{\times}} - \rho^2 - \rho'^2 .$$

Si les cercles ont été pris sous les formes $a \times b$ et $a' \times b'$:

$$\varpi = \frac{1}{2} (\overline{aa'} \times \overline{bb'} + \overline{ab'} \times \overline{ba'})$$

Quand les cercles sont orthogonaux, cette puissance est nulle. Sous la forme: $ab \,)(\, cd \,)(\, j_1 j_2 = o$ cela exprime que les couples *ab et cd* sont conjugués harmoniques sur une hyperbole équilatère, d'où le théorème réciproque: les cercles décrits avec deux tels couples aux extrémités d'un diamètre, sont orthogonaux. En développant l'expression précédente sous la forme:

$$(a' - a) \times (b' - b) + (b' - a) \times (a' - b) = 0$$

ou:

$$2(a \times b + a' \times b') = (a + a') \times (b + b')$$

on retrouve l'analogue de la relation harmonique; en outre:

$$\frac{a \times b + a' \times b'}{2} = \frac{a + a'}{2} \times \frac{b + b'}{2}$$

exprime que le cercle ayant pour points diamétraux les centres des deux cercles orthogonaux appartient au faisceau linéaire de ceux-ci (condition nécessaire et suffisante pour l'orthogonalité). On voit le principe de ces calculs: le produit intérieur des cercles se développe comme un produit polaire du domaine binaire, mais les segments qui apparaissent ainsi, et ne sont plus scalaires, sont soumis à une multiplication intérieure; dans le produit intérieur obtenu, on peut remplacer les segments par leurs vecteurs; si on exprime ceux-ci comme différences de points, on retrouve de nouvelles identités à interpréter entre produits intérieurs de points, c'est-à-dire entre cercles.

Les relations métriques sur la droite ne sont que des cas particuliers de ces relations entre cercles du plan, mais inversement l'analogie entre les relations telles que:

$$a^2 \,)(\, b^2 = \overline{ab}^2 = (b - a)^2 = b^2 - 2ab + a^2$$

sur la droite, et:

$$\overset{2}{a^{\times}} \,\Big|\, \overset{2}{b^{\times}} = \overset{2}{\overline{ab}^{\times}} = \overset{2}{(b - a)^{\times}} = \overset{2}{b^{\times}} - 2a \times b + \overset{2}{a^{\times}}$$

dans le plan, fournit un *principe de transfert* utile, et développé dans le sens où Grassmann a exposé l'algèbre du domaine binaire comme celle du produit intérieur. Il est permis de penser que ce calcul donne plus que celui des coordonnées, qui ne considère les relations entre cercles qu'à partir d'un point, d'ailleurs arbitraire, mais extérieur au système: ce que nous obtenons, par exemple, à partir de la dernière relation, en formant l'expression:

$$\overset{2}{\overrightarrow{pb}^{\times}} - 2\overrightarrow{pa} \times \overrightarrow{pb} + \overset{2}{\overrightarrow{pa}^{\times}} \,.$$

On aura beau multiplier les points de vue p desquels on regarde le système, il sera évidemment difficile d'avoir une idée aussi nette de sa constitution que celle qui résulte de la composition de ses éléments !

Toutes les relations métriques entre cercles, droites et points, s'obtiennent et s'interprètent immédiatement; citons seulement la condition de contact de deux cercles exprimant que leur faisceau est singulier:

$$\overset{2}{\Big(\overset{(2)}{f^{\times}} \,.\, \overset{(2)}{g^{\times}}\Big)\Big|} = 0$$

la condition pour que trois cercles passent par un point, ou forment un réseau singulier:

$$\overset{2}{\Big(\overset{(2)}{f^{\times}} \,.\, \overset{(2)}{g^{\times}} \,.\, \overset{(2)}{h^{\times}}\Big)\Big|} = 0$$

etc., qui toutes se développent sur le type des formes du domaine binaire.

Nous voulons revenir en particulier sur la condition exprimant que quatre points sont sur un cercle:

$$\overset{2}{a^{\times}} \,.\, \overset{2}{b^{\times}} \,.\, \overset{2}{c^{\times}} \,.\, \overset{2}{d^{\times}} = 0 \,. \qquad (7)$$

On sait que le développement du carré intérieur du premier membre donne le théorème de Ptolémée; nous allons donner d'autres développements de cette condition, qui indique une relation de la forme:

$$\alpha\, a^{\overset{2}{\times}} + \beta\, b^{\overset{2}{\times}} + \gamma\, c^{\overset{2}{\times}} + \delta\, d^{\overset{2}{\times}} = 0 \tag{8}$$

ou

$$\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \delta d^2 + \lambda_1 j_1^2 + \lambda_2 j_2^2 = 0 \tag{9}$$

ce qui donne la condition sous forme projective:

$$a^2 \,.\, b^2 \,.\, c^2 \,.\, d^2 \,.\, j_1^2 \,.\, j_2^2 = 0 \;. \tag{10}$$

Paul Serret, dans sa « Géométrie de Direction », a étudié plusieurs des formes qu'on peut donner à la relation précédente entre six points sur une conique. C'est ainsi qu'elle se transforme aisément en:

$$\overline{ab}^2 \,.\, \overline{bc}^2 \,.\, \overline{ca}^2 \,.\, \overline{dj_1}^2 \,.\, \overline{dj_2}^2 \,.\, \overline{j_1 j_2}^2 = 0 \tag{11}$$

et exprime qu'une courbe de 2e classe est inscrite dans les triangles abc et dj_1j_2: cette courbe est une parabole de foyer d, dont la tangente au sommet est la droite de Simson de ce point par rapport au triangle abc. Ou encore la relation (11) signifie que ces deux triangles abc et dj_1j_2 sont conjugués à une même courbe du 2e ordre, à savoir l'hyperbole équilatère de centre d passant par les sommets du quadrangle orthocentrique ayant abc pour triangle diagonal, et le cercle figure ici comme cercle des 9 points. On peut aussi employer la forme remarquable:

$$\left(\overline{ab}\,\overline{cd} \,.\, \overline{ac}\,\overline{db}\ )(\ j_1^2 \,.\, j_2^2\right) = 0 \tag{12}$$

ou

$$\begin{vmatrix} \overline{ab}\,\overline{cd}\ )(\ j_1^2 & \overline{ac}\,\overline{db}\ )(\ j_1^2 \\ \overline{ab}\,\overline{cd}\ )(\ j_2^2 & \overline{ac}\,\overline{db}\ )(\ j_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

qu'on peut du reste modifier grâce à l'identité:

$$\overline{ab}\,\overline{cd} + \overline{ac}\,\overline{db} + \overline{ad}\,\overline{bc} = 0 \tag{13}$$

et sur laquelle nous aurons à revenir.

Au point de vue métrique, si a, b, c, d sont des points, non des vecteurs, les masses:

$$a^{\overset{2}{\times}} \,\Big|\, u^{\overset{2}{\times}}\,, \quad b^{\overset{2}{\times}} \,\Big|\, u^{\overset{2}{\times}}\,, \quad c^{\overset{2}{\times}} \,\Big|\, u^{\overset{2}{\times}}\,, \quad d^{\overset{2}{\times}} \,\Big|\, u^{\overset{2}{\times}}$$

étant toutes égales à l'unité, la relation (9) donne, en prenant la 1re forme polaire de la droite de l'infini J:

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d = 0$$

relation qui se déduit aussi de (8) en prenant:

$$\alpha \overline{au} \times \overline{ax} + \beta \overline{bu} \times \overline{bx} + \gamma \overline{cu} \times \overline{cx} + \delta \overline{du} \times \overline{dx} = 0 \;.$$

On en déduit aussitôt:

$$\frac{[bcd]}{\alpha} = \frac{-\,[cda]}{\beta} = \frac{[dab]}{\gamma} = \frac{-\,[abc]}{\delta}$$

ce qui satisfait aussi à:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \;.$$

En outre (8) peut s'écrire:

$$\alpha\left(a^{\overset{2}{\times}} - d^{\overset{2}{\times}}\right) + \beta\left(b^{\overset{2}{\times}} - d^{\overset{2}{\times}}\right) + \gamma\left(c^{\overset{2}{\times}} - d^{\overset{2}{\times}}\right) = 0$$

$$\left(a^{\overset{2}{\times}} - d^{\overset{2}{\times}}\right) . \left(b^{\overset{2}{\times}} - d^{\overset{2}{\times}}\right) . \left(c^{\overset{2}{\times}} - d^{\overset{2}{\times}}\right) = 0$$

ou:

$$\frac{a+d}{2} \times (a-d) \,.\, \frac{b+d}{2} \times (b-d) \,.\, \frac{c+d}{2} \times (c-d) = 0$$

ce qui exprime que les droites menées perpendiculairement à ad, bd, cd en leur milieu, concourent au centre du cercle, et permet le calcul de ce centre.

Ces exemples élémentaires suffisent sans doute à montrer la simplicité du calcul employé. Ajoutons qu'il se généralise pour ainsi dire sans changement en un calcul appliqué aux sphères de l'espace, et qu'en outre cercles et sphères rentrent dans un système plus étendu de cercles et sphères orientés qui nécessite, par exemple, dans le plan, qu'on substitue aux points les cycles de Laguerre: j'espère montrer dans une autre occasion que ceux-ci sont les éléments de produits intérieurs qui fournissent sans peine des combinaisons intéressantes.

Chapitre VII

Extension du produit cyclique aux points et segments.

Le *produit cyclique* de n segments A, B, ... L sera l'expression:

$$F^{(n)}_{\smile} = A \smile B \smile \dots \smile L = \frac{1}{[j_1 j_2]^n}\Big(\big(F^{(n)})(j_2^n\big) j_1^n - \big(F^{(n)})(j_1^n\big) j_2^n\Big) . \qquad (1)$$

Cette forme vectorielle d'ordre n sera encore appelée l'*orientante* de la forme segmentaire initiale $F^{(n)}$; la définition s'étendra au cas où la forme $F^{(n)}$ sera une somme de produits de segments d'ordre n, et nous voyons que l'*orientante d'une forme segmentaire est celle de la forme vectorielle correspondante*, obtenue en remplaçant chaque segment par son vecteur.

Si nous considérons maintenant une forme ponctuelle $f^{(n)}$, nous appellerons *forme cyclique* correspondante, ou *produit cyclique*, la forme *mixte*:

$$f^{(n)}_{\smile} = \frac{1}{[j_1 j_2]^n}\Big(\big(f^{(n)})(j_2^n\big) j_1^n - \big(f^{(n)})(j_1^n\big) j_2^n\Big) . \qquad (2)$$

Une telle forme étant nulle dès qu'on substitue à $f^{(n)}$ une forme contenant $j_1 j_2$ en facteur, il est facile de voir que les formes cycliques d'ordre n dépendent linéairement de $2n-1$ unités.

C'est ainsi que les formes cycliques du 2e ordre forment un système linéaire à 5 unités, que nous étudierons un peu en détail.

Dans le système ainsi formé, on peut définir un nouveau produit intérieur, ce que nous ferons de la manière suivante. L'expression:

$$\frac{1}{[j_1 j_2]^n}\Big(\big(f^{(n)})(g^{(n)})(j_2^n\big) j_1^n - \big(f^{(n)})(g^{(n)})(j_1^n\big) j_2^n\Big) \qquad (3)$$

est une fonction linéaire des produits cycliques $f^{(n)}_{\smile}$ comme $g^{(n)}_{\smile}$; on peut la considérer comme un nouveau produit entre ces formes; le *produit intérieur de deux formes cycliques*[1] de même ordre est donc défini par:

$$f^{(n)}_{\smile} \mid g^{(n)}_{\smile} = f^{(n)}_{\smile})(g^{(n)} = g^{(n)}_{\smile})(f^{(n)} \qquad (4)$$

le produit polaire au second membre ayant le sens de l'expression (3). Il est à remarquer qu'un tel produit n'est ici *pas scalaire*, mais dépend de deux unités; ce produit intérieur sera aussi appelé *l'orientante* des formes $f^{(n)}$ et $g^{(n)}$, ou $f^{(n)}_{\smile}$ et $g^{(n)}_{\smile}$.

Si $f^{(n)}_{\smile}$ et $g^{(n)}_{\smile}$ sont des puissances cycliques de points, ce qui n'est pas le cas général, on a donc:

$$a^{n}_{\smile} \mid b^{n}_{\smile} = \overline{ab}^{n}_{\smile} = \overrightarrow{ab}^{n}_{\smile} = (b - a)^{n}_{\smile}$$

ce qui montre l'existence d'un *principe de transfert* analogue à celui que nous avons signalé pour le produit intérieur de cercles.

En ce qui concerne les formes cycliques d'ordre n, nous devons signaler qu'une telle forme peut en général se ramener à un produit cyclique de n éléments, c'est-à-dire qu'on peut résoudre en $a, b, c, \dots l$ l'équation:

$$f^{(n)}_{\smile} = a \smile b \smile c \dots l$$

à laquelle on peut substituer l'équivalence:

$$f^{(n)} = abc \dots l \,. \qquad (\text{module } j_1 j_2)$$

Celle-ci peut à son tour être remplacée par:

$$\left\{ \begin{array}{l} f^{(n)})(j_1^n = abc \dots l)(j_1^n \\ f^{(n)})(j_2^n = ab \dots l)(j_2^n \end{array} \right.$$

Or $f^{(n)})(j_1^n$ et $f^{(n)})(j_2^n$ représentent le système des tangentes menées à la forme $f^{(n)}$ de classe n par les points cycliques j_1 et j_2; ces deux systèmes de tangentes ont en général pour intersections un système de n^2 foyers, et c'est l'ensemble des n foyers réels $a, b \dots l$ que nous prendrons de préférence comme solutions.

On pourra encore dire que la forme mixte $f^{(n)}_{\smile}$ caractérise l'ensemble des courbes de classe n homofocales à la forme $f^{(n)}$.

[1] Ce produit n'est du reste pas le seul produit absolu qu'on puisse former entre formes cycliques.

Sauf quand il contient le facteur du 2e ordre $j_1 \smile j_2$ un produit cyclique de points ne s'annulera encore qu'avec l'un de ses facteurs.

Entre deux formes cycliques d'ordres différents, on peut aussi employer le produit intérieur: quand nous aurons besoin de le faire, nous nous ramènerons facilement au cas de deux formes de même ordre.

Nous allons maintenant montrer, au moyen de quelques applications, la simplicité des nouveaux produits définis pour l'expression des théorèmes sur l'orientation de Laguerre et G. Humbert, pour l'étude des propriétés focales des courbes et des coniques en particulier, enfin pour la représentation des covariants des formes binaires sur le plan complexe.

NOTE *sur la représentation des imaginaires de Laguerre et Darboux.*

Nous avons défini les opérations de la géométrie métrique à partir de celles de la géométrie projective au moyen des vecteurs isotropes:

$$j_1 = u + \iota v \qquad j_2 = u - \iota v$$

mais on peut rendre ces opérations indépendantes de l'introduction de ces éléments imaginaires si l'on substitue au nombre complexe ι la rotation d'un angle droit représentée par l'opérateur $\mathcal{J}$. C'est ce principe de représentation géométrique des imaginaires, comme l'on dit, qui a été en géométrie analytique étendu par Laguerre et Darboux à la représentation des points à coordonnées imaginaires: le calcul vectoriel est tout indiqué pour cette adaptation.

Toute équation entre vecteurs où figurent des coefficients imaginaires sera transformée, par le remplacement de ι par $\mathcal{J}$, en une équation d'autre signification, qui donnera une interprétation de la relation précédente entre vecteurs imaginaires. En outre, nous pourrons donner un sens à un symbole ponctuel:

$$a + \mathcal{J}b$$

substitué à:

$$a + \iota b$$

point imaginaire de la droite $\overline{ab}$, si toute équation qui contient de tels symboles peut être transformée en une équation vectorielle, c'est-à-dire si on impose la conservation des masses. Ainsi :

$$m' = a + \mathcal{J}b$$

n'aura de sens qu'en donnant à m' la masse $(1 + \mathcal{J})$ et le représentant par le point m tel que :

$$(1 + \mathcal{J})m = a + \mathcal{J}b$$

$$m - a = \mathcal{J}(b - m) .$$

C'est dans ces conditions que deux points imaginaires conjugués, par exemple :

$$m_1 = \frac{a + \iota b}{1 + \iota} \qquad m_2 = \frac{a - \iota b}{1 - \iota}$$

de la droite $\overline{ab}$, sont représentés par leurs *anti-points* réels :

$$m = \frac{a + \mathcal{J}b}{1 + \mathcal{J}} \qquad m' = \frac{a - \mathcal{J}b}{1 - \mathcal{J}} .$$

Les points à coordonnées imaginaires appartenant à un domaine à 4 dimensions, et étant désormais représentés dans le plan à deux dimensions, la position d'un point-image (représentatif d'un point imaginaire), situé par exemple hors d'une droite, ne suffit pas à indiquer si le point imaginaire correspondant appartient à la droite ; au contraire, tout point du plan peut être l'image d'un point imaginaire d'une droite, d'un cercle, d'une courbe quelconque, quand on ne connaît que sa position ; sa masse, par contre, c'est-à-dire un opérateur à deux dimensions de la forme $(\alpha\mathfrak{U} + \beta\mathcal{J})$, sera déterminée dès qu'on assujettira le point à être l'image d'un point imaginaire d'une courbe définie ; et aussi par suite l'anti-point conjugué.

Dans les relations cycliques, où l'on utilise l'équation :

$$j_1 \smile j_2 = u^{\overset{2}{\smile}} + v^{\overset{2}{\smile}} = 0$$

qui est aussi l'équation de définition de l'opérateur $\mathcal{J}$ (ou son opposé) :

$$u^{\overset{2}{\smile}} - \mathcal{J}^{(2}(v^{\overset{2}{\smile}} = 0$$

ou bien où l'on se sert d'équivalences suivant le module $(u^2 + v^2)$, toute différence entre les points imaginaires et leurs anti-points disparaît.

CHAPITRE VIII

Quelques applications des formes quadratiques intéreures eti cycliques.

Comme nous l'avons déjà signalé, les relations identiques entre formes algébriques de second ordre ou de seconde classe — en particulier — fourniront des identités analogues entre formes intérieures ou formes cycliques. Soient ainsi 4 segments P, Q, R, S du plan; ils sont liés par la relation identique:

$$(P \,.\, Q)(R \,.\, S) + (P \,.\, R)(S \,.\, Q) + (P \,.\, S)(Q \,.\, R) = 0 \qquad (1)$$

de forme:

$$\alpha\, aa' + \beta\, bb' + \gamma\, cc' = 0 \qquad (2)$$

qui signifie seulement que les trois couples aa', bb', cc' sont des formes de seconde classe dégénérées d'un même faisceau tangentiel. On en déduit immédiatement, en prenant les polaires successives de la droite de l'infini:

$$\alpha \frac{a + a'}{2} + \beta \frac{b + b'}{2} + \gamma \frac{c + c'}{2} = 0 \qquad (3)$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \qquad (4)$$

comme aussi:

$$\alpha\, a \times a' + \beta\, b \times b' + \gamma\, c \times c' = 0 \qquad (5)$$

$$\alpha\, a \smile a' + \beta\, b \smile b' + \gamma\, c \smile c' = 0 \qquad (6)$$

la première de ces équations rappelant plus généralement que les cercles de Monge des coniques d'un faisceau tangentiel forment un faisceau ponctuel, la seconde traduisant une relation analogue entre les foyers des coniques du faisceau; relation qui, exprimée à partir d'un point quelconque x par:

$$\alpha \overrightarrow{xa} \smile \overrightarrow{xa'} + \beta \overrightarrow{xb} \smile \overrightarrow{xb'} + \gamma \overrightarrow{xc} \smile \overrightarrow{xc'} = 0$$

signifie seulement que les bissectrices des couples de droites joignant x aux foyers des coniques du faisceau appartiennent à une même involution.

De même la relation identique entre 4 points a, b, c, d:

$$(a \,.\, b)(c \,.\, d) + (a \,.\, c)(d \,.\, b) + (a \,.\, d)(b \,.\, c) = 0$$

donne aussitôt:

$$\overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{cd} + \overrightarrow{ac} \times \overrightarrow{db} + \overrightarrow{ad} \times \overrightarrow{bc} = 0$$

$$\overrightarrow{ab} \smile \overrightarrow{cd} + \overrightarrow{ac} \smile \overrightarrow{db} + \overrightarrow{ad} \smile \overrightarrow{bc} = 0$$

relations bien connues.

Pour les formes de seconde classe, il est intéressant de noter qu'inversement les relations linéaires entre produits intérieurs et produits cycliques suffisent pour entraîner les relations algébriques.

Ceci revient à dire qu'une courbe de seconde classe est déterminée uniquement par son cercle de Monge et le système de ses foyers, à condition encore que de ces deux données résulte le même centre et la même masse.

Si en effet $f^{\overset{(2)}{\times}}$ et $f^{\overset{(2)}{\smile}}$ sont connus, la forme $f^{(2)}$ elle-même est connue à un multiple près de $j_1 j_2$ dans le premier cas, de $\overset{2}{j}_1$ et $\overset{2}{j}_2$ dans le second: elle est donc bien déterminée.

En conséquence, il sera naturel d'étudier le système linéaire à 5 unités formé par les produits cycliques du 2e ordre. Dans ce système, les produits d'un point par un vecteur (foyers de paraboles) forment un important système à 4 unités. Soient o, u, v un point quelconque du plan et deux vecteurs unitaires rectangulaires; les relations:

$$o \smile u = u \smile o \qquad o \smile v = v \smile o$$

$$u \smile v = v \smile u \qquad u^{\overset{2}{\smile}} + v^{\overset{2}{\smile}} = 0$$

permettent de garder pour unités, par exemple:

$$o^{\overset{2}{\smile}}\,, \qquad o \smile u\,, \qquad o \smile v\,, \qquad u^{\overset{2}{\smile}}\,.$$

Comme précédemment pour le produit intérieur, une forme $\Sigma\mu m^{\overset{2}{\smile}}$ à masse différente de zéro et qu'on peut supposer ramenée à l'unité, pourra, si elle a un centre o à distance finie:

$$\Sigma\mu = 1 \qquad \Sigma\mu\, m = 0$$

être mise sous la forme du produit cyclique de deux foyers f, f', racines de:

$$f^{\overset{2}{\smile}} - 2o \smile f + \Sigma\mu . m^{\overset{2}{\smile}} = 0$$

$$\left.\begin{matrix} f \\ f' \end{matrix}\right\} = o \pm \sqrt{o^{\overset{2}{\smile}} - \Sigma\mu . m^{\overset{2}{\smile}}} = o \pm \gamma\sqrt{u^{\overset{2}{\smile}}} = o \pm \gamma u$$

donc:

$$\Sigma\mu . m^{\overset{2}{\smile}} = f \smile f' = o^{\overset{2}{\smile}} - \gamma^2 u^{\overset{2}{\smile}} .$$

Toutes les courbes de seconde classe de foyers f, f' ont pour forme générale:

$$ff' \mp \beta^2 j_1 j_2 = o^2 - \alpha^2 u^2 \mp \beta^2 v^2$$

avec:

$$\alpha^2 = \pm \beta^2 + \gamma^2 .$$

Plücker a montré comment obtenir les foyers d'une courbe donnée par son équation tangentielle; sous des formes voisines, Siebeck, Möbius, ont étudié les foyers des coniques d'un faisceau tangentiel; Beltrami, Cesaro, Transon, Laguerre, etc. ont fait des études analogues.

Rappelons-en l'essentiel; dans un faisceau $a \smile a'$, $b \smile b'$ figure généralement une forme parabolique $p \smile u$:

$$a \smile a' - b \smile b' = p \smile u . \tag{1}$$

En faisant le produit intérieur par $p^{\overset{2}{\smile}}$:

$$\overrightarrow{pa} \smile \overrightarrow{pa'} = \overrightarrow{pb} \smile \overrightarrow{pb'} = \overrightarrow{pc} \smile \overrightarrow{pc'} \tag{2}$$

si:

$$\alpha\, a \smile a' + \beta\, b \smile b' = (\alpha + \beta)\, c \smile c' . \tag{3}$$

On a aussi:

$$)\frac{\overrightarrow{pa}}{\overrightarrow{pb}} =)\frac{\overrightarrow{pb'}}{\overrightarrow{pa'}}$$

donc p se construit comme centre de similitude de ab et $b'a'$.

Comme on a en outre:

$$\alpha \frac{a + a'}{2} + \beta \frac{b + b'}{2} = (\alpha + \beta) \frac{c + c'}{2}$$

ou:

$$\alpha \frac{\overrightarrow{pa} + \overrightarrow{pa'}}{2} + \beta \frac{\overrightarrow{pb} + \overrightarrow{pb'}}{2} = (\alpha + \beta) \frac{\overrightarrow{pc} + \overrightarrow{pc'}}{2}$$

un couple quelconque $c \smile c'$ du faisceau se construit facilement à partir de p, les vecteurs $\overrightarrow{pc}$ et $\overrightarrow{pc'}$ étant donnés par leur demi-somme et leur moyenne cyclique.

Nous avons jusqu'à présent laissé de côté le cas des formes cycliques paraboliques, c'est-à-dire qu'on peut mettre sous la forme $p \smile u$, produit d'un point par un vecteur. Comment se composent ces formes?

Soient $u \smile a$ et $v \smile b$ deux telles formes (a, b points, u, v vecteurs quelconques ici); toute forme en dépendant linéairement sera:

$$w \smile c = \alpha u \smile a + \beta v \smile b \tag{4}$$

ce qui entraîne (en prenant la polaire de la droite de l'infini):

$$w = \alpha u + \beta v \tag{5}$$

c'est-à-dire la *conservation*, ou la *composition* des vecteurs. Or, dans (4), divisons les vecteurs des 2 membres par un vecteur quelconque r; les points a, b, c sont alors précédés d'opérateurs complexes $)\frac{u}{r}$, $)\frac{v}{r}$, $)\frac{w}{r}$ et nous retrouvons l'addition des points-images de points imaginaires, que nous avons indiquée. Nous pourrons encore dire que dans une expression $u \smile a$, le point a a une masse *vectorielle*, et nous parlerons alors d'une *addition cyclique des points*; les points c résultant de la formule (4) sont en effet situés sur une circonférence, comme foyers de paraboles d'un faisceau tangentiel.

En particulier, l'identité:

$$(c - b) \smile a + (a - c) \smile b + (b - a) \smile c = 0$$

ou:

$$\overrightarrow{bc} \smile a + \overrightarrow{ca} \smile b + \overrightarrow{ab} \smile c = 0 \tag{6}$$

généralisation de celle de la droite:

$$[bc]a + [ca]b + [ab]c = 0$$

situe les trois points a, b, c sur une même circonférence, la masse vectorielle attachée à chacun d'eux étant proportionnelle au vecteur joignant les deux autres points [1].

[1] Une telle addition a été employée pour la représentation des vis de Ball d'un faisceau et du cylindroïde qui le porte.

Au système à cinq unités des formes quadratiques cycliques est adjoint le système complémentaire des expressions du type:

$$a\overset{2}{\smile} . b\overset{2}{\smile} . c\overset{2}{\smile} . d\overset{2}{\smile}$$

qui trouvent une représentation dans les hyperboles équilatères:

$$a^2 . b^2 . c^2 . d^2 . j_1 j_2$$

déterminées par quatre points a, b, c, d ou quatre conditions linéaires équivalentes. Il n'y a ainsi aucune difficulté à interpréter l'équation scalaire:

$$a\overset{2}{\smile} . b\overset{2}{\smile} . c\overset{2}{\smile} . d\overset{2}{\smile} . e\overset{2}{\smile} = 0$$

De même, la condition:

$$a\overset{2}{\smile} . b\overset{2}{\smile} . c\overset{2}{\smile} . h\overset{2}{\smile} = 0 \qquad (7)$$

signifie que les quatre points a, b, c, h forment un quadrangle orthocentrique — ou sont sur une même droite.

Cette relation pourra encore être écrite:

$$\left(h\overset{2}{\smile} - a\overset{2}{\smile}\right) . \left(h\overset{2}{\smile} - b\overset{2}{\smile}\right) . \left(h\overset{2}{\smile} - c\overset{2}{\smile}\right) = 0$$

ou:

$$\left(\overrightarrow{ah} \smile \frac{a+h}{2}\right) . \left(\overrightarrow{bh} \smile \frac{b+h}{2}\right) . \left(\overrightarrow{ch} \smile \frac{c+h}{2}\right) = 0$$

et elle donne les propriétés déjà énoncées du cercle des neuf points du quadrangle. Ou bien, par:

$$\alpha a\overset{2}{\smile} + \beta b\overset{2}{\smile} = -\left(\gamma c\overset{2}{\smile} + \eta h\overset{2}{\smile}\right) \qquad (8)$$

elle donne:

$$\alpha\beta\, \overrightarrow{ab}\overset{2}{\smile} = \gamma\eta\, \overrightarrow{ch}\overset{2}{\smile}$$

c'est-à-dire que $\overrightarrow{ch}$ est perpendiculaire — ou parallèle — à $\overrightarrow{ab}$; ceci résultait également de:

$$\overrightarrow{ab}\overset{2}{\smile} . \overrightarrow{ch}\overset{2}{\smile} = 0$$

ou:

$$\left(\overrightarrow{ab}\overset{2}{\smile} . \overrightarrow{ch}\overset{2}{\smile}\right)^{\times} = -\left(\overrightarrow{ab} . \overrightarrow{ch}\right)\left(\overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{ch}\right) = 0$$

d'après (12, ch. II).

Le produit intérieur entre formes cycliques donne d'autres résultats intéressants. Je rappelle que:

$$m \smile n \mid p \smile q = 0 \tag{9}$$

signifie que les deux couples m, n et p, q sont cycliquement conjugués, c'est-à-dire qu'ils ont pour conique harmonique un cercle — courbe dont l'orientation des directions asymptotiques est nulle — sur lequel ils sont conjugués harmoniques. L'équation est en effet équivalente à:

$$\left\{\begin{array}{l} mn\,)(\,pq\,)(\,\overset{2}{j_1} = 0 \\ mn\,)(\,pq\,)(\,\overset{2}{j_2} = 0 \end{array}\right.$$

montrant que les points cycliques appartiennent au lieu:

$$mn\,)(\,pq\,)(\,x^2 = 0$$

L'équation (9) se développe en:

$$\overrightarrow{mp} \smile \overrightarrow{nq} + \overrightarrow{mq} \smile \overrightarrow{np} = 0 \tag{10}$$

$$(p - m) \smile (q - n) + (q - m) \smile (p - n) = 0$$

$$2\,(m \smile n + p \smile q) = (m + n) \smile (p + q) \tag{11}$$

forme de la relation harmonique qui donne les relations vectorielles connues à partir d'une origine arbitraire x, qu'on peut en particulier placer en un des points, ou au milieu d'un des couples:

D'après (10) ou:

$$)\frac{\overrightarrow{mp}}{\overrightarrow{mq}} = -\,)\frac{\overrightarrow{np}}{\overrightarrow{nq}}$$

on reconnaît que:

$$)\frac{\overset{2}{\overrightarrow{mp}\times}}{\overset{2}{\overrightarrow{mq}\times}} =)\frac{\overset{2}{\overrightarrow{np}\times}}{\overset{2}{\overrightarrow{nq}\times}}$$

et aussi:

$$\widehat{pmq} = \widehat{pnq} \qquad \text{(module } \pi\text{)}$$

ce qui met en évidence deux cercles orthogonaux, l'un conjugué au couple p, q et passant par m, n, l'autre contenant les quatre points. Soit o le milieu de p, q:

$$p + q = 2o$$

et en faisant le produit intérieur de (11) par $o\overset{2}{\smile}$:

$$\overrightarrow{om} \smile \overrightarrow{on} = \overrightarrow{op}\overset{2}{\smile} = \overrightarrow{oq}\overset{2}{\smile} \tag{12}$$

Tous les couples de vecteurs $\overrightarrow{om}$, $\overrightarrow{on}$ définis par une telle équation, et qui ont $\overrightarrow{op}$ ou $\overrightarrow{oq}$ pour moyenne cyclique, sont formés en joignant le point o aux points m et n qu'on dit correspondants dans une *inversion symétrique* ou *sym-inversion*, de centre o, axe op, puissance $\overrightarrow{op}\overset{2}{\times}$.

Représentons maintenant par des lettres x, y des vecteurs sym-inverses; e étant un vecteur déterminé, l'équation:

$$y =)\frac{e\overset{2}{\smile}}{x} \tag{13}$$

détermine la sym-inversion; ou encore:

$$)\frac{y}{e} =)\frac{e}{x}$$

Pour l'inversion proprement dite, il faut prendre:

$$)\frac{x'}{e} = \mathrm{K}\,)\frac{e}{x}$$

ou:

$$x' = \mathrm{K}\,)\frac{e}{x}\,(e =)\frac{\bar{x}}{\bar{e}}\,(e = e\overset{2}{\times}\bar{x} \tag{14}$$

$\bar{x}$ étant le vecteur défini comme *inverse* de x avec la puissance d'inversion 1. On voit encore facilement que le produit (séquence) de deux sym-inversions de même pôle est une similitude.

La sym-inversion apparaît aussi comme cas particulier d'une transformation quadratique plus générale, l'*inversion triangulaire*, dont nous allons donner la définition; a, b, c étant les 3 sommets d'un triangle, un couple de points inverses, m, m', sera défini par:

$$a \smile b \;.\; b \smile c \;.\; c \smile a \;.\; m \smile m' = 0 \tag{15}$$

de sorte que m et m' sont les foyers d'une conique inscrite dans le triangle abc. Cette équation n'est qu'une généralisation de (7) et si on considère abc comme triangle diagonal d'un quadrangle orthocentrique $efgh$, on peut aussi l'écrire:

$$e\overset{2}{\smile} \,.\, f\overset{2}{\smile} \,.\, g\overset{2}{\smile} \,.\, m \smile m' = 0 \,.$$

Pour la sym-inversion déjà définie par:

$$p \smile q \mid m \smile n = 0 \tag{9}$$

le faisceau d'hyperboles équilatères qui définit la transformation est formée de courbes concentriques passant par p, q et leurs deux anti-points imaginaires; on pourra représenter la transformation par:

$$p\overset{2}{\smile} \,.\, q\overset{2}{\smile} \,.\, \frac{p+q}{2} \smile \mathfrak{J}(p-q) \,.\, m \smile n = 0 \tag{16}$$

qui sous une forme équivalente à (9) définit les couples m, n conjugués.

Reverons pour un instant à l'équation (8) pour en tirer de nouvelles conclusions; on peut écrire:

$$\alpha\, a\overset{2}{\smile} + \beta\, b\overset{2}{\smile} = -\left(\gamma c\overset{2}{\smile} + \eta\, h\overset{2}{\smile}\right) = -(\gamma + \eta)\, c' \smile c'' \,.$$

De même:

$$\beta\, b\overset{2}{\smile} + \gamma\, c\overset{2}{\smile} = -\left(\alpha\, a\overset{2}{\smile} + \eta\, h\overset{2}{\smile}\right) = -(\alpha + \eta)\, a' \smile a''$$

$$\gamma\, c\overset{2}{\smile} + \alpha\, a\overset{2}{\smile} = -\left(\beta\, b\overset{2}{\smile} + \eta\, h\overset{2}{\smile}\right) = -(b + \eta)\, b' \smile b''$$

(je rappelle que $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ et que ces coefficients se déterminent comme pour l'équation (8, chap. VI).)

Je dis que deux quelconques des couples ainsi obtenus ont une orientante nulle (indéterminée), par exemple:

$$a' \smile a'' \mid b' \smile b'' = 0 \,.$$

C'est en effet:

$$\left(\alpha\, a\overset{2}{\smile} + \eta\, h\overset{2}{\smile}\right) \Big| \left(\beta\, b\overset{2}{\smile} + \eta\, h\overset{2}{\smile}\right) = 0$$

$$\alpha\beta\, \overrightarrow{ab}\overset{2}{\smile} + \left(\alpha\, a\overset{2}{\smile} + \beta\, b\overset{2}{\smile}\right) \Big| \eta\, h\overset{2}{\smile} = 0$$

ou:

$$\alpha\beta\,\overrightarrow{ab}\overset{2}{\smile} - \left(\gamma c\overset{2}{\smile} + \eta h\overset{2}{\smile}\right) \mid \eta h\overset{2}{\smile} = 0$$

$$\alpha\beta\,\overrightarrow{ab}\overset{2}{\smile} = \gamma\eta\,\overrightarrow{ch}\overset{2}{\smile}$$

ce que nous avons déjà démontré.

On voit donc la configuration formée par les points a', a'', b', b'', c', c'', situés par quatre sur trois cercles de centres a, b, c, respectivement conjugués aux triangles bch, cah, abh. De même h est centre d'un cercle conjugué au triangle abc, comme le traduit:

$$-\eta h\overset{2}{\smile} = \alpha a\overset{2}{\smile} + \beta b\overset{2}{\smile} + \gamma c\overset{2}{\smile}$$

ou:

$$\lambda j_1 j_2 - \eta h^2 = \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2$$

La relation harmonique (9) que nous avons établie entre deux couples $m \smile n$ et $p \smile q$:

$$m \smile n \mid p \smile q = 0$$

signifie que n est le conjugué cyclique de m par rapport à $p \smile q$ donc:

$$\overrightarrow{mp} \smile q + \overrightarrow{mq} \smile p = \left(\overrightarrow{mp} + \overrightarrow{mq}\right) \smile n \; . \tag{17}$$

C'est un cas particulier d'un théorème de Laguerre que le conjugué d'un point m est le même par rapport à une famille de coniques homofocales — c'est-à-dire par rapport aux foyers f, f' — que par rapport aux points de contact des tangentes menées de m à une conique de la famille. Soient en effet $\overline{ma}$, $\overline{ma'}$ deux telles tangentes:

$$\mu m^2 + \alpha aa' = (\mu + \alpha)(ff' - \beta^2 j_1 j_2)$$

d'ou:

$$\mu m\overset{2}{\smile} + \alpha a \smile a' = (\mu + \alpha) f \smile f'$$

et en prenant le conjugué cyclique de m par rapport aux 2 membres:

$$\alpha a \smile a' \mid m = (\mu + \alpha) f \smile f' \mid m$$

comme aussi:

$$\alpha a \smile a' \mid m\overset{2}{\smile} = (\mu + \alpha) f \smile f' \mid m\overset{2}{\smile}$$

$$\alpha\,\overrightarrow{ma} \smile \overrightarrow{ma'} = (\mu + \alpha)\,\overrightarrow{mf} \smile \overrightarrow{mf'}$$

ce qui est un théorème de Poncelet.

Quant au théorème de Laguerre, il exprime que tous les cercles circonscrits aux triangles maa' pour toutes les coniques homofocales, forment un faisceau.

Cherchons encore l'enveloppe des droites polaires X du point m par rapport à un faisceau de coniques homofocales:

$$ff' + \lambda j_1 j_2$$

le lieu est donné par le produit extérieur:

$$(ff' \mid X) \cdot (j_1 j_2 \mid X) \cdot m = 0$$

se développant en:

$$[fX][j_1 X][f'j_2 m] + [fX][j_2 X][f'j_1 m] + [f'X][j_1 X][fj_2 m] + [f'X][j_2 X][fj_1 m] = 0$$

ou:

$$[fX]j_1 j_2)(X\overline{f'm} + [f'X]j_1 j_2)(X\overline{fm} = 0$$

ou:

$$(f\mathfrak{J}\overrightarrow{mf'} + f'\mathfrak{J}\overrightarrow{mf})(X^2 = 0$$

équation tangentielle d'une conique, qui est une parabole (dite de Chasles) et dont la droite de Monge (directrice) a pour équation:

$$(\mathfrak{J}\overrightarrow{mf'} \times f + \mathfrak{J}\overrightarrow{mf} \times f')(x^2 = (2\mathfrak{J}\overrightarrow{mo} \times o)(x_2 = 0$$

tandis que les foyers sont donnés par la forme cyclique:

$$\mathfrak{J}\overrightarrow{mf'} \smile f + \mathfrak{J}\overrightarrow{mf} \smile f' .$$

Or nous avons vu que:

$$\overrightarrow{mf'} \smile f + \overrightarrow{mf} \smile f' = (\overrightarrow{mf} + \overrightarrow{mf'}) \smile n$$

n étant conjugué cyclique de m par rapport à f et f'; un des foyers de la parabole est donc ce point n, tandis que l'autre est rejeté à l'infini dans la direction du vecteur:

$$\mathfrak{J}(\overrightarrow{mf} + \overrightarrow{mf'}) = 2\mathfrak{J}\overrightarrow{mo}$$

o étant le centre des coniques homofocales.

Nous avons déjà noté que les produits intérieurs de points traduisaient des théorèmes relatifs aux figures formées par les cercles. Mais les produits cycliques transforment et complètent d'heureuse manière les relations ainsi formées. Ainsi nous avons signalé que pour quatre points sur un cercle:

$$a^{\overset{2}{\times}} \cdot b^{\overset{2}{\times}} \cdot c^{\overset{2}{\times}} \cdot d^{\overset{2}{\times}} = 0$$

pouvait s'écrire (12, chap. VI):

$$\begin{vmatrix} \overline{ab}\,\overline{cd}\ )(\ j_1^2 & \overline{ac}\,\overline{db}\ )(\ j_1^2 \\ \overline{ab}\,\overline{cd}\ )(\ j_2^2 & \overline{ac}\,\overline{db}\ )(\ j_2^2 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Or ceci traduit:

$$\overline{ab} \smile \overline{cd} \cdot \overline{ac} \smile \overline{db} = 0 \tag{18}$$

ou:

$$(\overline{ab} \smile \overline{cd} \cdot \overline{ac} \smile \overline{db})^{\times} = 0 \tag{19}$$

c'est-à-dire que les bissectrices des couples de directions $\overrightarrow{ab}\,\overrightarrow{cd}$, $\overrightarrow{ac}\,\overrightarrow{db}$ et aussi $\overrightarrow{ad}\,\overrightarrow{bc}$ sont confondues si les points a, b, c, d sont sur un cercle. Il est du reste avantageux de développer ces relations sous la forme projective de congruences géométriques, c'est-à-dire d'égalités entre les positions des formes, sans tenir compte des masses qui les affectent; l'équation:

$$\overrightarrow{ab} \smile \overrightarrow{cd} \equiv \overrightarrow{ac} \smile \overrightarrow{db}$$

signifiant seulement:

$$\overrightarrow{ab} \smile \overrightarrow{cd} = \theta\, \overrightarrow{ac} \smile \overrightarrow{db}$$

θ étant un coefficient numérique dont la valeur importe peu ici. Cette équation, sous la forme:

$$)\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{ac}} \equiv)\frac{\overrightarrow{db}}{\overrightarrow{dc}}$$

rappelle la propriété bien connue de l'angle inscrit:

$$\widehat{bac} = \widehat{bdc} \qquad (\text{module } \pi) \ . \tag{20}$$

C'est du reste ce qu'on retrouve en développant (19) d'après (12, chap. II):

$$(\overrightarrow{ab} \cdot \overrightarrow{ac})(\overrightarrow{cd} \times \overrightarrow{db}) + (\overrightarrow{cd} \cdot \overrightarrow{db})(\overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{ac}) = 0 \qquad (21)$$

$$\sin \widehat{bac} \cos \widehat{bdc} - \sin \widehat{bdc} \cos \widehat{bac} = 0$$

équation qui, résolue en sin. ou tg., redonne la condition (20).

Quant au centre o, il est donné par:

$$)\frac{\overrightarrow{ob}}{\overrightarrow{oc}} =)\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{ac}} \left(\mathrm{K})\frac{\overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{ac}} \right)^{(-1}.$$

On pouvait encore développer (15) sous la forme suivante:

$$[abc] b \times c \mid \overset{2}{d^{\times}} - [dbc] b \times c \mid \overset{2}{a^{\times}} = 0$$

$$\left([abc] \overset{2}{d^{\times}} - [dbc] \overset{2}{a^{\times}} \right) \Big| \, b \times c = 0$$

et si on suppose que a, b, c sont fixes, d variable sur le cercle:

$$b \times c \mid \overset{2}{d^{\times}} - \alpha [bcd] = 0$$

détermine le cercle comme appartenant au faisceau déterminé par le cercle $b \times c$ et la droite $[bc]$.

Montrons comment l'équation du cercle:

$$\overrightarrow{ab} \smile \overrightarrow{cd} \cdot \overrightarrow{ac} \smile \overrightarrow{db} = 0$$

conduit elle aussi au théorème de Ptolémée. Si on la rapproche de l'identité:

$$\overrightarrow{ab} \smile \overrightarrow{cd} + \overrightarrow{ac} \smile \overrightarrow{db} + \overrightarrow{ad} \smile \overrightarrow{bc} = 0$$

on voit que:

$$\frac{\overrightarrow{ab} \smile \overrightarrow{cd}}{\lambda} = \frac{\overrightarrow{ac} \smile \overrightarrow{db}}{\mu} = \frac{\overrightarrow{ad} \smile \overrightarrow{bc}}{\nu}$$

λ, μ, ν étant trois nombres tels que:

$$\lambda + \mu + \nu = 0$$

Il s'ensuit la relation entre les normes:

$$\frac{\overrightarrow{ab}^{\overset{2}{\times}}\,\overrightarrow{cd}^{\overset{2}{\times}}}{\lambda^2} = \frac{\overrightarrow{ac}^{\overset{2}{\times}}\,\overrightarrow{db}^{\overset{2}{\times}}}{\mu^2} = \frac{\overrightarrow{ad}^{\overset{2}{\times}}\,\overrightarrow{bc}^{\overset{2}{\times}}}{\nu^2}$$

donc:

$$\sqrt{\overrightarrow{ab}^{\overset{2}{\times}}\,\overrightarrow{cd}^{\overset{2}{\times}}} \pm \sqrt{\overrightarrow{ac}^{\overset{2}{\times}}\,\overrightarrow{db}^{\overset{2}{\times}}} \pm \sqrt{\overrightarrow{ad}^{\overset{2}{\times}}\,\overrightarrow{bc}^{\overset{2}{\times}}} = 0 \ .$$

Enfin, notons que:

$$\frac{\overrightarrow{ca} \smile \overrightarrow{db}}{\overrightarrow{cb} \smile \overrightarrow{da}} = \Big)\cfrac{\Big)\cfrac{\overrightarrow{ca}}{\overrightarrow{cb}}}{\Big)\cfrac{\overrightarrow{da}}{\overrightarrow{db}}}$$

est le rapport anharmonique complexe de quatre points du plan. Si ce rapport est un nombre réel, le quatrième point d appartient au cercle déterminé par les trois premiers. S'il est imaginaire, d est seulement image d'un point imaginaire du cercle. Selon la valeur du module du rapport, d appartient à un cercle déterminé par:

$$\frac{\overrightarrow{ca}^{\overset{2}{\times}}\,\overrightarrow{db}^{\overset{2}{\times}}}{\overrightarrow{cb}^{\overset{2}{\times}}\,\overrightarrow{da}^{\overset{2}{\times}}} = \theta^2$$

$$\left(\overrightarrow{ca}^{\overset{2}{\times}} b^{\overset{2}{\times}} - \theta^2\, \overrightarrow{cb}^{\overset{2}{\times}} a^{\overset{2}{\times}}\right) \Big| \, d^{\overset{2}{\times}} = 0 \ .$$

Sous la forme projective, les relations cycliques traduisent les conditions *angulaires*, tandis que les formes intérieures sont, comme on le sait, particulièrement adaptées aux relations *métriques*. Traitons ici un problème du premier type; sur les côtés $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$ d'un triangle sont trois points e, f, g; les cercles circonscrits aux triangles age, bef, cfg concourent en un point d; il en est de même du cercle circonscrit à abc dans le cas où e, f, g sont en ligne droite. En effet, soit d le point de concours des deux premiers cercles:

$$\overrightarrow{dg} \smile \overrightarrow{ae} \equiv \overrightarrow{de} \smile \overrightarrow{ag}$$

$$\overrightarrow{de} \smile \overrightarrow{bf} \equiv \overrightarrow{df} \smile \overrightarrow{be} \ .$$

Faisons le produit membre-à-membre des deux équations; après suppression de $\overrightarrow{de}$, il reste:

$$\overrightarrow{dg} \smile \overrightarrow{ae} \smile \overrightarrow{bf} \equiv \overrightarrow{ag} \smile \overrightarrow{df} \smile \overrightarrow{be}$$

mais:

$$[abe] = 0$$

donc:

$$\overrightarrow{ae} \equiv \overrightarrow{be} \; ,$$

d'où:

$$\overrightarrow{dg} \smile \overrightarrow{bf} \equiv \overrightarrow{ag} \smile \overrightarrow{df}$$

ou, d'après:

$$[cbf] = 0 \qquad [acg] = 0$$

$$\overrightarrow{dg} \smile \overrightarrow{cf} \equiv \overrightarrow{df} \smile \overrightarrow{cg}$$

ce qui exprime bien que d est sur le troisième cercle. Si on avait supposé $[efg] = o$, on aurait de même montré que d appartenait au quatrième cercle. La démonstration géométrique usuelle est exactement la même, traduite de préférence par les similitudes:

$$\Big)\frac{\overrightarrow{de}}{\overrightarrow{dg}} \equiv \Big)\frac{\overrightarrow{ae}}{\overrightarrow{ag}} \qquad \Big)\frac{\overrightarrow{df}}{\overrightarrow{de}} \equiv \Big)\frac{\overrightarrow{bf}}{\overrightarrow{be}} \; . \qquad \text{etc.}$$

Le théorème qui mène à la droite de Simson n'est qu'une réciproque particulière du théorème précédent; il suffit de reprendre la démonstration en sens inverse. La démonstration est encore la même quand par l'inversion on substitue des cercles concourants en un point aux droites de la figure, et la configuration présente alors plus de symétrie.

Suivons encore la démonstration suivante: deux cercles variables, tangents entre eux, sont assujettis à avoir chacun, en un point fixe, une tangente déterminée; le lieu de leurs points de contact est formé de deux cercles orthogonaux.

Soient a, b, m les points de contact fixes et mobile, c, s, t les points de rencontre des tangentes en ces points:

$$\overrightarrow{ta} \smile \overrightarrow{tm} \equiv \overrightarrow{am}^{\smile 2}$$

$$\overrightarrow{sb} \smile \overrightarrow{sm} \equiv \overrightarrow{bm}^{\smile 2}$$

en divisant membre-à-membre et tenant compte de: $[stm] = 0$

$$)\frac{\vec{ta}}{\vec{sb}} \equiv)\frac{\vec{am}^{\smile 2}}{\vec{bm}^{\smile 2}}$$

ou:

$$)\frac{\vec{ca}}{\vec{cb}} \equiv)\frac{\vec{am}^{\smile 2}}{\vec{bm}^{\smile 2}}$$

donc:

$$)\frac{\vec{ma}}{\vec{mb}} \equiv \begin{cases} \left( )\frac{\vec{ca}}{\vec{cb}} \right)^{\left(\frac{1}{2}\right.} \\ \mathcal{J}\left( )\frac{\vec{ca}}{\vec{cb}} \right)^{\left(\frac{1}{2}\right.} \end{cases}$$

quelle que soit la détermination prise pour

$$\left( )\frac{\vec{ca}}{\vec{cb}} \right)^{\left(\frac{1}{2}\right.}$$

ce qui est bien le théorème énoncé.

Nous avons assez longuement insisté sur les relations conduisant aux lieux circulaires; mais dans le domaine des formes quadratiques on écrit aussi aisément des lieux formés de droites, ou coniques. Ainsi:

$$\vec{ca} \smile \vec{cb} \,.\, \vec{da} \smile \vec{db} = 0$$

donne comme lieu pour le point d une hyperbole équilatère passant par les points a et b, symétriques par rapport à son centre, tandis que:

$$\vec{ma} \smile \vec{au} \,.\, \vec{mb} \smile \vec{bu} = 0$$

où a, b, u sont des points et un vecteur fixe, donne comme lieu pour m la droite $\overline{ab}$ et la droite de l'infini.

CHAPITRE IX

Les théorèmes de Laguerre et Humbert sur l'orientation; la représentation complexe des covariants des formes binaires.

Dans le chapitre VII, nous avons énoncé que l'orientante d'une forme segmentaire est celle de la forme vectorielle correspondante; c'est ce que Laguerre a exprimé en disant que l'orientation d'une courbe d'ordre n était aussi celle du système de ses asymptotes.

Pour les formes du second ordre, nous avons déjà employé le fait que si deux formes cycliques $f \smile f'$ et $g \smile g'$ avaient une orientante nulle, les familles de coniques homofocales $ff' - \beta^2 j_1 j_2$ et $gg' - \mu^2 j_1 j_2$ avaient pour coniques harmoniques des cercles, dont les asymptotes déterminent des orientantes nulles.

Si nous écrivons maintenant le système des tangentes communes à deux coniques sous la forme:

$$(ff' - \beta^2 j_1 j_2) \cdot (gg' - \mu^2 j_1 j_2))((ff' - \beta^2 j_1 j_2)(x^2 \cdot (gg' - \mu^2 j_1 j_2)(x^2 = 0$$

où x est le point courant, ou encore:

$$\begin{vmatrix} (ff' - \beta^2 j_1 j_2 \overset{2}{)}()(x^2 & (gg' - \mu^2 j_1 j_2)(ff' - \beta^2 j_1 j_2)(x^2 \\ (ff' - \beta^2 j_1 j_2)(gg' - \mu^2 j_1 j_2)(x^2 & (gg' - \mu^2 j_1 j_2 \overset{2}{)}()(x^2 \end{vmatrix} = 0$$

quels que soient les paramètres β et μ, la forme orientante de cette forme du quatrième ordre sera:

$$(f \smile f') \overset{2}{|} \smile (g \smile g') \overset{2}{|} - (f \smile f' \mid g \smile g')^{\overset{2}{\smile}}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\overline{ff'}^{\overset{2}{\smile}} \smile \overline{gg'}^{\overset{2}{\smile}} - (\overline{fg} \smile \overline{f'g} + \overline{fg'} \smile \overline{f'g})^{\overset{2}{\smile}}\right)$$

ou:

$$\overrightarrow{fg} \smile \overrightarrow{fg'} \smile \overrightarrow{f'g} \smile \overrightarrow{f'g'} \equiv T_1 \smile T_2 \smile T_3 \smile T_4$$

T_1, T_2, T_3, T_4 étant les quatre tangentes communes à deux coniques quelconques prises dans les deux familles d'homofocales.

Laguerre a énoncé un théorème analogue pour l'orientation des tangentes communes à deux courbes quelconques, ou a deux de leurs homofocales, les systèmes de leurs foyers en particulier.

Sans entrer dans le détail de la formation symbolique des résultants, ce sera encore une conséquence du fait que dans le calcul de la forme orientante d'une forme donnée, toute différence entre les homofocales disparaît, les termes contenant $j_1 j_2$ en facteur s'annulant par la substitution du produit cyclique au produit algébrique.

Humbert s'est aussi attaché à la considération des divers groupes polaires cycliques d'un point par rapport à une courbe de classe quelconque, et aux lieux décrits par les points obtenus quand la courbe variait dans un faisceau tangentiel.

Or soit $f^{(n)}$ une courbe de classe n, m un point du plan :

$$f^{\smile(n)} \mid m \smile x^{\overset{n-1}{\smile}} = 0$$

donne le groupe des $n - 1$ points réels, communs aux deux faisceaux d'équations:

$$f^{(n)} \,)(\, mx^{n-1} \,)(\, j_1^n = 0$$

$$f^{(n)} \,)(\, mx^{n-1} \,)(\, j_2^n = 0$$

qui constituent les droites polaires de m par rapport aux tangentes menées des points cycliques à la courbe $f^{(n)}$.

Le groupe polaire suivant sera le groupe polaire cyclique de m par rapport au précédent, et ainsi de suite, jusqu'à:

$$f^{\smile(n)} \mid m^{\overset{n-1}{\smile}} \smile x = 0$$

qui donne le point m' commun aux droites:

$$f^{(n)} \,)(\, m^{n-1}x \,)(\, j_1^n = 0$$

$$f^{(n)} \,)(\, m^{n-1}x \,)(\, j_2^n = 0 \; .$$

Si on suppose maintenant que la courbe $f^{(n)}$ appartienne à un faisceau:

$$f^{(n)} = a^{(n)} + \theta\, b^{(n)}$$

le lieu du point m', engendré par l'intersection de rayons homographiques issus des points cycliques j_1 et j_2, sera un cercle, d'équation:

$$\left(a^{\overset{(n)}{\smile}} \mid m^{\overset{n-1}{\smile}} \smile x\right) . \left(b^{\overset{(n)}{\smile}} \mid m^{\overset{n-1}{\smile}} \smile x\right) = 0 .$$

Dans les mêmes conditions, le groupe de points formant la $p^{\text{ième}}$ polaire cyclique de m aurait décrit la courbe d'équation:

$$\left(a^{\overset{(n)}{\smile}} \mid m^{\overset{p}{\smile}} \smile x^{\overset{n-p}{\smile}}\right) . \left(b^{\overset{(n)}{\smile}} \mid m^{\overset{p}{\smile}} \smile x^{\overset{n-p}{\smile}}\right) = 0$$

ou:

$$\left(a^{(n)})(m^p x^{n-p})(j_1^n\right)\left(b^{(n)})(m^p x^{n-p})(j_2^n\right)$$
$$- \left(a^{(n)})(m^p x^{n-p})(j_2^n\right)\left(b^{(n)})(m^p x^{n-p})(j_1^n\right) = 0$$

et les points cycliques étant points multiples d'ordre $2(n\text{-}p)$, cette courbe est $(n\text{-}p)$-circulaire.

En particulier, les foyers d'une courbe de classe n constituent le groupe polaire d'une courbe de classe $n + 1$ par rapport à un vecteur *quelconque* u de la droite de l'infini.

La représentation complexe des covariants des formes binaires repose sur le principe de transfert déjà exposé entre les relations sur la droite et les relations cycliques du plan. Mais précédemment son exposition nécessitait l'emploi des coordonnées symétriques relatives à des axes déterminés, alors qu'elle peut maintenant se faire de façon absolue. Nous nous bornerons ici à l'étude partielle d'une forme cubique:

$$f^{\overset{(3)}{\smile}} = a \smile b \smile c .$$

Les formes covariantes sont l'évectant cubique:

$$g^{\overset{(3)}{\smile}} = a' \smile b' \smile c'$$

et la hessienne:

$$h^{\overset{(2)}{\smile}} = h_1 \smile h_2$$

dont le discriminant fournit l'invariant de la forme cubique, que nous supposerons différent de zéro.

La hessienne peut être définie par:

$$\left(f^{\overset{(3)}{\smile}} \mid x\right)\Big|^{2} = 0$$

ou:

$$\left(f^{\overset{(3)}{\smile}} \smile x\right) \Big|^{2} = (a \smile b \smile c \smile x) \Big|^{2} = 0$$

qui sous l'une ou l'autre forme exprime que h_1 et h_2 sont les deux points x pour lesquels le rapport anharmonique complexe $(abcx)$ est équi-anharmonique.

L'évectant cubique est le lieu des points x pour lesquels:

$$\left(f^{\overset{(3)}{\smile}} \,\Big|\, x^{\overset{2}{\smile}}\right) . \left(h^{\overset{(2)}{\smile}} \,\Big|\, x\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \left(f^{\overset{(3)}{\smile}} \smile x\right) \overset{2}{.} \left(f^{\overset{(3)}{\smile}} \smile x\right) \overset{2}{.} \left(f^{\overset{(3)}{\smile}} \smile x\right) = 0$$

ou qui sont tels qu'un des rapports $(abcx)$ est harmonique.

Donc, sur le cercle circonscrit à abc, a', b', c' sont les conjugués cycliques de a, b, c respectivement par rapport à $b \smile c$, $c \smile a$, $a \smile b$, tandis que la hessienne est représentée par les anti-points de h_1 et h_2, conjugués au cercle précédent.

On sait que, quel que soit le point x, on a:

$$f^{\overset{(3)}{\smile}} \,\Big|\, h^{\overset{(2)}{\smile}} \smile x = 0$$

et aussi que $g^{\overset{(3)}{\smile}}$ a même hessienne que $f^{\overset{(3)}{\smile}}$.

Nous voulons montrer la construction des polaires d'un point p par rapport à $f^{(3)}$; soient q_1 et q_2 constituant le premier groupe polaire:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ap} \smile b \smile c + \overrightarrow{bp} \smile c \smile a + \overrightarrow{cp} \smile a \smile b &= \left(\overrightarrow{ap} + \overrightarrow{bp} + \overrightarrow{cp}\right) \smile q_1 \smile q_2 \\ &= 3\,\overrightarrow{gp} \smile q_1 \smile q_2 \end{aligned}$$

d'où:

$$-\,)\frac{\overrightarrow{ab} \smile \overrightarrow{bc} \smile \overrightarrow{ca}}{3\,\overrightarrow{gp}} =)\frac{\overrightarrow{aq_1} \smile \overrightarrow{aq_2} \smile \overrightarrow{bc}}{\overrightarrow{ap}} =)\frac{\overrightarrow{bq_1} \smile \overrightarrow{bq_2} \smile \overrightarrow{ca}}{\overrightarrow{bp}} =)\frac{\overrightarrow{cq_1} \smile \overrightarrow{cq_2} \smile \overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{cp}}$$

Supposons d'abord p sur le cercle des points a, b, c.:

$$)\frac{\overrightarrow{ap}}{\overrightarrow{bp}} = \lambda\,)\frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{bc}}$$

λ étant un nombre réel; le second et le troisième rapport donnent:

$$\overrightarrow{aq_1} \smile \overrightarrow{aq_2} + \lambda \left( )\frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{bc}} \right)^{(2} \overrightarrow{bq_1} \smile \overrightarrow{bq_2} = 0$$

$$\left(\overrightarrow{bc}^{\overset{2}{\smile}} \smile a^{\overset{2}{\smile}} + \lambda\, \overrightarrow{ac}^{\overset{2}{\smile}} \smile b^{\overset{2}{\smile}}\right) \Big|\, q_1 \smile q_2 = 0$$

de forme :

$$e_1 \smile e_2 \mid q_1 \smile q_2 = 0 \ .$$

Or on sait en outre que :

$$h_1 \smile h_2 \mid q_1 \smile q_2 = 0$$

d'où la construction de $q_1 \smile q_2$, couple conjugué à deux couples déterminés.

A remarquer que:

$$)\frac{\overrightarrow{bc}^{\overset{2}{\smile}}}{\overrightarrow{ac}^{\overset{2}{\smile}}} = -\lambda)\frac{\overrightarrow{be_1}^{\overset{2}{\smile}}}{\overrightarrow{ce_1}^{\overset{2}{\smile}}} = -\lambda)\frac{\overrightarrow{be_2}^{\overset{2}{\smile}}}{\overrightarrow{ce_2}^{\overset{2}{\smile}}}$$

permet de construire les points e_1 et e_2, et que cette construction sera la même, comme aussi celle des points q_1 et q_2, quand à un point p sur le cercle on aura substitué un point hors du cercle, λ étant alors remplacé par un opérateur complexe (similitude).

On construira ensuite la seconde polaire r par:

$$q_1 \smile q_2 \mid r \smile p = 0$$

sans aucune difficulté.

Pour construire q_1 et q_2, on pouvait aussi employer:

$$)\frac{\overrightarrow{ap}}{\overrightarrow{aq}} +)\frac{\overrightarrow{bp}}{\overrightarrow{bq}} +)\frac{\overrightarrow{cp}}{\overrightarrow{cq}} = 0$$

en mettant q à la place d'un des points q_1 ou q_2.

En employant:

$$\overrightarrow{ap} = \overrightarrow{aq} + \overrightarrow{qp} \ , \quad \text{etc.},$$

on aura:

$$)\frac{\overrightarrow{qp}}{\overrightarrow{qa}} +)\frac{\overrightarrow{qp}}{\overrightarrow{qb}} +)\frac{\overrightarrow{qp}}{\overrightarrow{qc}} = 3 \ .$$

De même la construction de r mènera à:

$$)\frac{\overrightarrow{pr}}{\overrightarrow{pa}} +)\frac{\overrightarrow{pr}}{\overrightarrow{pb}} +)\frac{\overrightarrow{pr}}{\overrightarrow{pc}} = 3 \ .$$

En employant les opérateurs conjugués, on peut écrire:

$$)\frac{\overrightarrow{pa''}}{\overrightarrow{pr''}} +)\frac{\overrightarrow{pb''}}{\overrightarrow{pr''}} +)\frac{\overrightarrow{pc''}}{\overrightarrow{pr''}} = 3$$

a'', b'', c'', r'' étant les points inverses de a, b, c, r par rapport à p avec la puissance un, ou:

$$\overrightarrow{pa''} + \overrightarrow{pb''} + \overrightarrow{pc''} = 3\overrightarrow{pr''}$$

ce qui donne r'', d'où r. C'est en somme ainsi que procède Laguerre, mais nous voulons insister sur le fait qu'il ne convient pas de représenter par $)\frac{1}{\overrightarrow{pa}}$ ou $\frac{1}{\overrightarrow{pa}}$ le vecteur $\overrightarrow{pa''}$, parce que le produit cyclique par un vecteur quelconque donnerait des résultats tout à fait différents pour les deux expressions.

Si on a commencé par la construction de r, celle de q_1 et q_2 résulte de:

$$r \smile p \mid q_1 \smile q_2 = 0$$

avec:

$$h_1 \smile h_2 \mid q_1 \smile q_2 = 0 .$$

Nous n'avons pas abordé, dans cette étude, le calcul différentiel; pour en donner un exemple, considérons la transformation conforme:

$$y = \frac{1}{2}\left(x +)\frac{\overset{2}{\smile}{c}}{x}\right)$$

x, y, c étant des vecteurs:

$$x = \overrightarrow{op} \qquad c = \overrightarrow{of} \qquad y = \overrightarrow{om} .$$

Dans ces conditions, si p décrit un cercle de centre o, m décrit une ellipse de foyers f et $f' = 2o - f$; si p décrit une droite passant par o, m décrit une hyperbole homofocale aux ellipses précédentes, et ayant pour asymptotes la droite lieu de p et sa symétrique par rapport à $\overline{of}$.

Un déplacement quelconque de p entraîne un déplacement correspondant de m et :

$$2dy = dx - \frac{\overset{2}{c} \smile dx}{\overset{2}{x}} = \frac{dx}{x}\left(x - \frac{\overset{2}{c}}{x}\right)$$

$$dy = \frac{dx}{x}(x - y)$$

ce qui donne la similitude instantanée :

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y}{x}$$

Si p décrit un cercle de centre o :

$$\frac{dx}{x} = \lambda \mathfrak{I} = \frac{dy}{x - y}$$

donc le déplacement du point m est perpendiculaire à :

$$x - y = \overrightarrow{mp}$$

Si au contraire p décrit une droite passant par o, le déplacement de m est suivant mp. On retrouve là les propriétés caractéristiques de la normale à l'ellipse et de la tangente à l'hyperbole homofocale.

Nous espérons, par les brèves indications précédentes, et l'esquisse tracée dans cet article des efforts qu'on peut faire pour adapter l'algèbre géométrique à la traduction claire des propriétés des figures, avoir intéressé quelques lecteurs et leur avoir donné, avec le goût de poursuivre de semblables essais, la conviction que nous avons empruntée à Leibnitz, Grassmann et tant d'autres: qu'il sera un jour possible de répéter, par des combinaisons de symboles, les configurations géométriques, mécaniques, physiques, dont nous aurons pénétré les lois. Que cette conviction nous excuse des maladresses et longueurs encore présentes dans cet exposé !