Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 23 (1923)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'INVERSION DES PRODUITS ARITHMÉTIQUES
Autor: Bell, E. T.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19747

SUR L'INVERSION DES PRODUITS ARITHMÉTIQUES

PAR

E. T. BELL (Seattle, Wash.)

---

1. — Dans une étude sur les travaux arithmétiques de Gauss, M. A. AUBRY[1] observa que la formule

$$\varphi(a) + \varphi(b) + \dots = \varphi(n) ,$$

où a, b, ... sont tous les diviseurs de l'entier n, $\varphi(n)$ étant la fonction d'Euler, « semble avoir donné le signal de la découverte d'une foule de relations arithmétiques qu'il y aurait grand intérêt à réunir et à rapprocher ». Je crois avoir rempli ce desideratum avec une algèbre symbolique que je construisis en 1915, et que je simplifiai dans quelques notes et articles parus plus tard[2]. Cette algèbre donne le moyen immédiat de réaliser l'idée de M. Aubry pour un corps quelconque d'éléments ayant une loi de résolution unique en facteurs irréductibles, soit par exemple le corps des entiers rationnels ou les idéaux d'un corps algébrique donné. On peut appliquer d'une façon immédiate les principes extrêmement simples de cette algèbre pour réunir et augmenter encore le nombre des relations entre les fonctions numériques trouvées, et dont un exposé a été donné par M. DICKSON dans son *History of the Theory of Numbers* (tome 1, chapitres 5, 10, 19).

Dans la présente Note j'applique des principes de la même espèce à l'inversion des produits

$$\prod_n [f(d)]^{g(\delta)} ,$$

[1] *L'Enseignement mathématique*, tome 11 (1909), p. 438-439.

[2] Voir, par exemple, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 27, pp. 330-332; *Transactions* (of the A. M. S.), vol. 25, pp. 135-154.

où le Π s'étend à tous les couples d, δ de diviseurs conjugués de l'entier n, et où f, g sont des fonctions numériques quelconques. Comme cas très spécial de l'inversion générale on trouve une formule importante de Dedekind.

2. — Rappelons quelques principes simples de la méthode citée. Soit n un entier quelconque > 0, et $f_1(n)$, $f_2(n)$, ..., $f_r(n)$ des fonctions numériques. Posons symboliquement la somme

$$\Sigma_n f_1(d_1) f_2(d_2) \dots f_r(d_r) ,$$

où Σ_n s'étend à tous les systèmes $(d_1, d_2, \dots, d_r)$ de r entiers > 0 dont le produit est n, égal au produit symbolique

$$f_1 f_2 \cdots f_r ,$$

de sorte que

$$\Sigma_n f_1(d_1) f_2(d_2) \dots f_r(d_r) \equiv f_1 f_2 \cdots f_r .$$

On voit sans peine que le produit symbolique $f_1 f_2 \dots f_r$ reste invariant sous toutes les permutations de $f_1, f_2, \dots, f_r$. Ainsi cette multiplication symbolique est commutative. Elle est aussi associative. Par exemple

$$\begin{aligned} f_1(f_2 f_3) &= \Sigma_n [f_1(d) \Sigma_\delta f_2(\delta_1^1) f_3(\delta_2^1)] (n = d\delta , \ \delta = \delta_1 \delta_2) , \\ &= \Sigma_n f_1(d_1) f_2(d_2) f_3(d_3) \quad (n = d_1 d_2 d_3) , \\ &= \quad f_1 f_2 f_3 . \end{aligned}$$

L'unité de cette multiplication est la fonction η, où

$$\eta(1) = 1 , \qquad \eta(n) = 0 , \qquad (n > 1) ;$$

car on a $\eta f = f$, f étant une fonction numérique quelconque.

La fonction f' telle que

$$ff' = \eta$$

est unique quand f est donnée.

Je l'ai nommée la fonction réciproque de f.

Soient $f_1, f_2, \dots, g_1, g_2, \dots, h_1, h_2, \dots$ des fonctions numériques telles que

$$f_1 f_2 \cdots f_r g_1 g_2 \cdots g_s = h_1 h_2 \dots h_t .$$

Le produit $g_1 g_2 \ldots g_s$ est une fonction numérique, soit g; ainsi de même pour $h_1 h_2 \ldots h_t$, soit h. Soit g' la fonction réciproque de g, de sorte que $gg' = \eta$, et posons

$$hg' \equiv \frac{h}{g}$$

symboliquement, par analogie avec l'artihmétique ordinaire. Donc, de la relation donnée on tire

$$f_1 f_2 \cdots f_r = \frac{h_1 h_2 \ldots h_t}{g_1 g_2 \cdots g_s} .$$

Ces fonctions symboliques ont toutes les propriétés multiplicatives des fractions arithmétiques. Ainsi, par exemple, la multiplication indiquée par $\times$ étant symbolique au sens de cette algèbre, on a

$$\frac{f_1 f_2 \cdots f_r}{g_1 g_2 \cdots g_s} \times \frac{g_1 g_2 \cdots g_s}{h_1 h_2 \ldots h_t} = \frac{f_1 f_2 \cdots f_r}{h_1 h_2 \ldots h_t} .$$

3. — Pour étendre l'ismorphisme j'écris symboliquement

$$\prod_n [f(d)]^{g(\delta)} \equiv f^g . \tag{1}$$

Soient maintenant $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$, $k(n)$ des fonctions numériques telles que

$$f^g = h^k , \tag{2}$$

et soit g' la fonction réciproque de g, et k' celle de k. Donc, je dis,

$$f^{k'} = h^{g'} , \tag{3}$$

en analogie complète avec l'algèbre ordinaire.

Pour démontrer (3), on obtient de (2)

$$\Sigma_n g(\delta) \log f(d) = \Sigma_n k(\delta) \log h(d) ,$$

ou, si l'on pose $\log f(n) = \mathrm{F}(n)$, $\log h(n) = \mathrm{H}(n)$,

$$g\mathrm{F} = k\mathrm{H} .$$

Multiplions symboliquement cette identité par φ, où φ est une fonction numérique arbitraire. Donc

$$\varphi g\mathrm{F} = \varphi k\mathrm{H} \ ,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$f^{\varphi g} = h^{\varphi k} \ .$$

Soit maintenant φ la fonction spécifique $g'k'$. Donc $\varphi g = k'$, $\varphi k = g'$, et on a (3).

L'inversion de Dedekind est le cas spécial où $g = u$, $k = \eta$, et $u(n)$ est la fonction numérique

$$u(n) = 1 \qquad (n = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \ldots)\ .$$

Car la fonction réciproque de η est η elle-même, et la fonction réciproque de u est la fonction μ de Möbius, où $\mu(n) = 0$ quand n contient un facteur premier à une puissance > 1, et $\mu(n) = 1$ ou -1, selon que n est le produit d'un nombre pair ou impair de facteurs premiers distincts. Dans ce cas (2), (3) deviennent

$$f^{u} = h^{\eta} \ , \qquad f^{\eta} = h^{\mu} \ ,$$

ou, en forme non-symbolique,

$$\prod_{n} f(d) = h(n) \ , \qquad f(n) = \prod_{n} \left[h(d)\right]^{\mu(\delta)} \ .$$

University of Washington.