Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 23 (1923)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DÉDUCTION GÉOMÉTRIQUE DES DÉRIVÉES SUPÉRIEURES DES FONCTIONS CIRCULAIRES sin x ET cos x

Autor: Arnovljevic, J. / Petronievics, B.

Kapitel: II

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19746

II

1. — Dans la fig. 3, on a PZ $= x$, $\overline{\mathrm{OP}} = \Delta x$, P est le point de la tangente PT, Q le point de la tangente QT', PS la sécante passant par les points Q et P, PM le sinus de l'arc x (et de l'angle correspondant α, QN le sinus de l'arc $x + \Delta x$ (et de l'angle correspondant $\alpha + \Delta x$), Q'N' le sinus de l'arc $x + 2\Delta x$ (et de l'angle correspondant $\alpha + 2\Delta\alpha$).

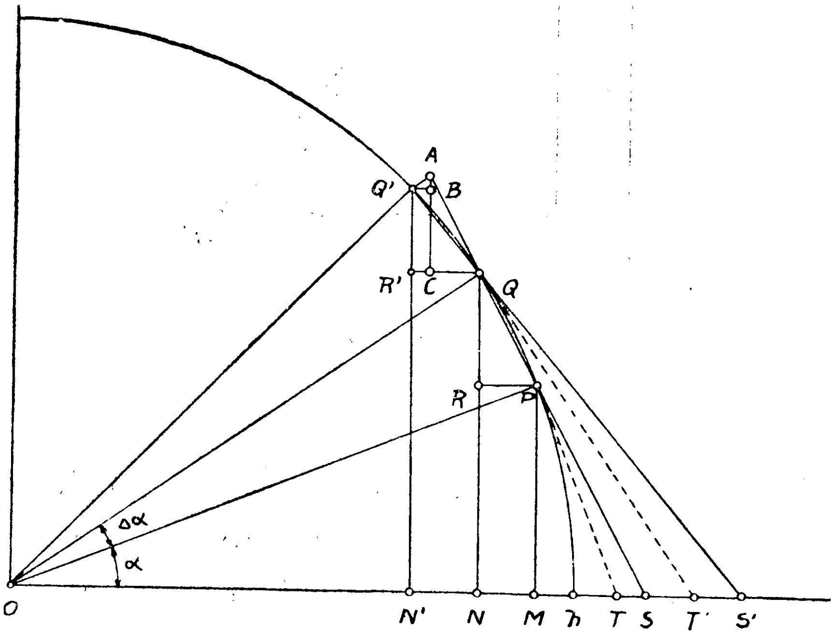

Fig 3

De même on a dans cette figure:

$$\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x = \mathrm{NQ} - \mathrm{MP} = \mathrm{RQ}$$

$$\Delta \sin(x + \Delta x) = \sin(x + 2\Delta x) - \sin(x + \Delta x) = \mathrm{N'Q'} - \mathrm{NQ} = \mathrm{R'Q'}$$

$$\Delta\Delta \sin x = \Delta \sin(x + \Delta x) - \Delta \sin x = \mathrm{R'Q'} - \mathrm{RQ} = \mathrm{BC} - \mathrm{AC} = -\mathrm{AB}\ .$$

Dans le triangle Q'QA, ayant l'arc Q'A pour base, on a: $\widehat{\mathrm{Q'A}} = \mathrm{Q'Q} \,.\, \sphericalangle\, \mathrm{Q'QA}$, et dans le triangle Q'QO, ayant l'arc Q'Q pour base, on a de même: $\widehat{\mathrm{Q'Q}} = \mathrm{OQ} \,.\, \sphericalangle\, \mathrm{Q'OQ}$.

On aura donc:

$$\lim \mathrm{Q'A} = \lim \Delta x \,.\, \lim \sphericalangle\, \mathrm{SQS'} = \lim \Delta x \,.\, \lim \Delta \sphericalangle\, \mathrm{RQP}$$
$$= \lim \Delta x \,.\, \lim \Delta \alpha$$

d'où:

$$\lim \mathrm{Q'A} = dx \,.\, d\alpha = dx^2\ , \qquad (1)$$

Comme le triangle Q′BA coïncide, en passant à la limite, avec le petit triangle non tracé Q′BA′, qui est semblable au triangle ON′Q′, on aura d'autre part:

$$\lim \sphericalangle AQ'B = \lim \sphericalangle (\alpha + 2\Delta\alpha) = \alpha = x \; .$$

On a aussi:

$$\lim AB = -\lim \Delta\Delta \sin x = -d^2 \sin x \; . \qquad (2)$$

De même, comme en passant à la limite, Δ ON′Q′ coïncide avec OMP, on aura:

$$\lim \frac{AB}{Q'A} = \lim \frac{PM}{OP} \; , \qquad (3)$$

Des équations (1), (2) et (3), il s'ensuit enfin:

$$\frac{d^2 \sin x}{dx^2} = -\sin x \; .$$

2. — En suivant la déduction précédente de la seconde dérivée de sin x, on déduira facilement la seconde dérivée de cos x.

Dans la fig. 3, on a:

$$\Delta \cos x = -RP \; , \quad \Delta \cos (x + \Delta x) = -R'Q \; , \quad \Delta\Delta \cos x = -R'C \; .$$

On a de même:

$$\lim Q'A = dx^2 \; , \qquad (1)$$

$$\lim \sphericalangle AQ'B = x \; ,$$

$$\lim Q'B = d \cos^2 x \qquad (2)$$

et

$$\lim \frac{Q'B}{Q'A} = \frac{OM}{OP} \; . \qquad (3)$$

On aura donc enfin:

$$\frac{d^2 \cos x}{dx^2} = -\cos x \; .$$

3. — Les figures 4 et 4 *a* se rapportent à la troisième dérivée des fonctions sin x et cos x. Dans la fig. 4 *a*, les triangles R″Q′Q″ et R′Q′A′ de la fig. 4 ont été agrandis de telle sorte que le triangle Q″Q′A′ contient, non seulement le petit triangle Q″B′A′, mais aussi le triangle encore plus petit DEA′.

Dans la fig. 4, mais en tant qu'elle diffère de la fig. 3, Q' est le point de la tangente $Q'T''$, $Q'S''$ la sécante passant par les points Q'' et Q', $Q''N''$ le sinus de l'arc $x + 3\Delta x$ (et de l'angle correspondant $\alpha + 3\Delta\alpha$).

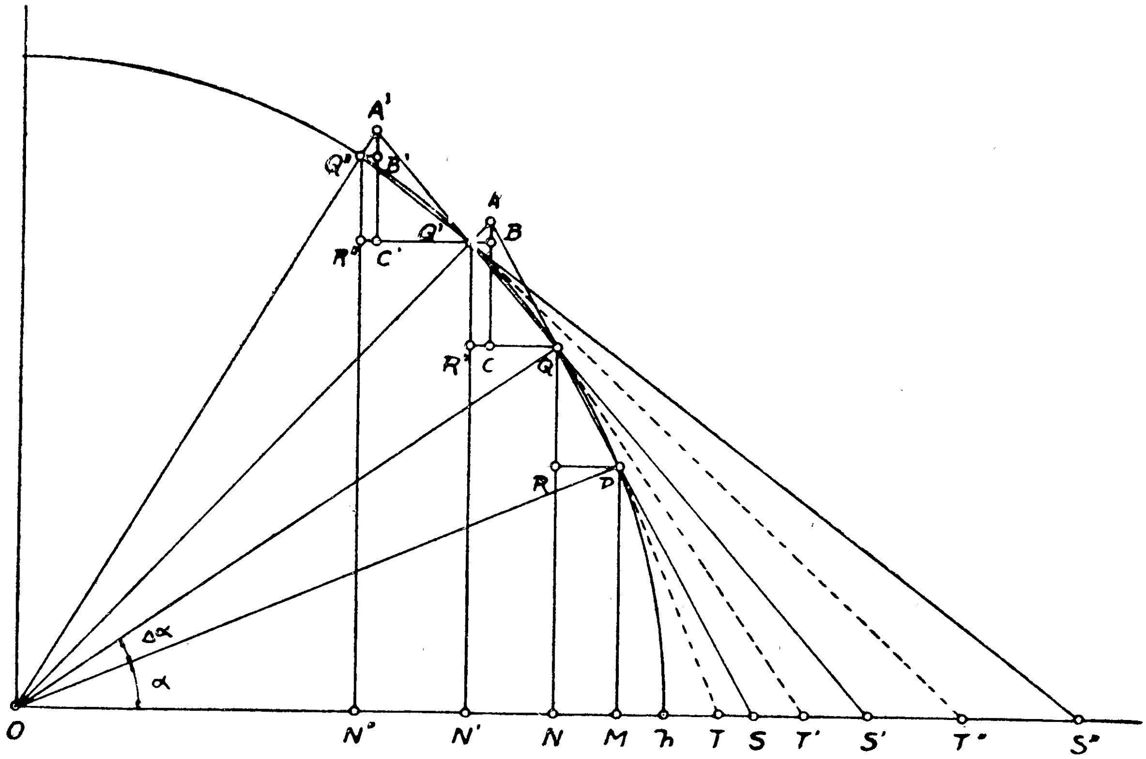

Fig. 4

De même, on a dans la figure 4:

$$\Delta \sin(x + 2\Delta x) = \sin(x + 3\Delta x) - \sin(x + 2\Delta x) = N''Q'' - N'Q' = R''Q''$$

$$\Delta\Delta \sin(x + \Delta x) = \Delta \sin(x + 2\Delta x) - \Delta \sin(x + \Delta x)$$
$$= R''Q'' - R'Q' = - A'B'$$

$$\Delta\Delta\Delta \sin x = \Delta\Delta \sin(x + \Delta x) - \Delta\Delta \sin . x = - A'B' - (- AB) .$$

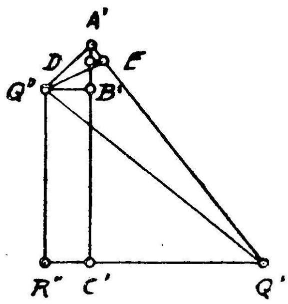

Fig 4a

Comme dans la figure 4 *a*:

A′B′ de la figure 4, représente A′B′

et AB » » » DB′ ,

on a, dans cette figure:

$$\Delta\Delta\Delta \sin x = -\,A'B' - (-\,DB') = -\,A'D \; .$$

On a aussi dans la figure 4 *a*:

$$\lim A'E = \lim \widehat{A'E} = \lim Q''A' . \lim \sphericalangle A'Q''E$$
$$= \lim \widehat{Q''A'} . \lim \Delta \sphericalangle A'Q''B' \; ,$$

mais comme, en passant à la limite, $\widehat{Q''A'}$ coïncide (dans la figure 4) avec Q′A et $\sphericalangle$ A′Q″B′ avec A Q′B, on aura:

$$\lim A'E = \lim Q'A . \lim \Delta \sphericalangle AQ'B = dx^2 . d\alpha = dx^3 \; , \qquad (1)$$

On aura aussi, en passant à la limite (ΔDA′E étant $\sim$ ΔC′A′Q′),

$$\lim \sphericalangle DA'E = \lim \sphericalangle C'A'Q' = \lim \sphericalangle N'Q'S' = \lim \sphericalangle NQT' = \alpha = x$$

et

$$\lim A'D = -\lim \Delta\Delta\Delta \sin x = -\, d^3 \sin x \; . \qquad (2)$$

De même, en passant à la limite, ΔDA′E devient semblable à ΔMPO, et on aura:

$$\lim \frac{A'D}{A'E} = \frac{OM}{OP} \; . \qquad (3)$$

Des équations (1), (2) et (3) il s'ensuit enfin:

$$\frac{d^3 \sin x}{dx^3} = -\cos x \; .$$

Remarque. — En suivant la déduction de la troisième dérivée de sin x, on déduira facilement la troisième dérivée de cos x.

On aura en effet (dans la fig. 4):

$$\Delta\Delta \cos x = R''Q' - R'Q = -\,R''C' \; ,$$

et

$$\Delta\Delta\Delta \cos x = -\,R''C' - (-\,R'C) = DE$$

(dans la figure 4 *a*, où Q″B′ représente R″C′, tandis que le segment rectiligne correspondant à R′C′ > R″C n'a pas été tracée).

Comme

$$\lim \frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{A'E}} = \frac{\mathrm{PM}}{\mathrm{OP}} ,$$

on aura:

$$\frac{d^3 \cos . x}{dx^3} = \sin x .$$

4. — En suivant la déduction des deuxième et troisième dérivées de sin x, on déduira facilement la quatrième dérivée, et ainsi de suite.

On s'apercevra aussi (comp. fig. 3 et 4) que, si cette déduction porte sur la dérivée de l'ordre pair, l'angle du petit triangle (dont les différences $\Delta^n y$ et Δx^n sont des côtés), qui correspond à l'angle α, sera orienté dans le même sens que celui-ci, tandis que, s'il s'agit de la dérivée de l'ordre impair, cet angle sera orienté dans le sens de l'angle NQS. D'où la différence dans le procédé de démonstration des deux cas.

On pourrait démontrer que, tandis que $\Delta^2 \sin x$ et $\Delta^3 \sin x$ sont négatifs, la différence $\Delta^4 \sin x$ sera positive. Mais alors, comme la valeur absolue de la deuxième dérivée et de chaque dérivée de l'ordre pair de la fonction sin x est sin x et celle de la troisième et de chaque dérivée de l'ordre impair cos x, la valeur de la quatrième dérivée sera $+ \sin x$, et les valeurs $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$ se succèderont périodiquement à partir de la cinquième dérivée. Et la même remarque s'applique aux valeurs $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$, $\cos x$ par rapport à la fonction cos x.

Remarque. — Nous terminerons notre travail par une remarque. Comme on le sait, l'objection la plus sérieuse au calcul différentiel de LEIBNIZ était celle faite par le Hollandais B. NIEUWENTIJT: les dérivées supérieures d'une fonction ne peuvent pas exister, étant donné qu'elles ne possèdent pas de signification géométrique [1]. Or, dans notre travail, nous avons établi, pour la première fois d'une manière incontestable, l'existence géométrique des dérivées supérieures d'une fonction.

---

[1] L'objection se trouve dans l'ouvrage de NIEUWENTIJT, intitulé *Analysis infinitorum*, 1695, Cap. VIII, et la réponse de LEIBNIZ dans *Acta Eruditorum*, 1695 (une traduction de cette réponse se trouve dans le livre de J. M. CHILD, *The Early mathematical papers of Leibniz*, London, 1920). Comp. aussi M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. III, 2te Aufl., S. 254-56.