

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 23 (1923)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DÉDUCTION GÉOMÉTRIQUE DES DÉRIVÉES SUPÉRIEURES DES FONCTIONS CIRCULAIRES $\sin x$ ET $\cos x$
Autor: Arnovljevic, J. / Petronievics, B.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-19746>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 20.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Et puisque Aa et $a\omega$ coïncident, les points α, β, γ , déterminés par la rencontre de $A\alpha$ avec $a\alpha$, de AC avec ac , de AB avec ab , sont en ligne droite.

4. — Des raisonnements du paragraphe 2 on déduira de suite que si trois homologues (O, D) transforment un triangle t en triangles homologues avec un triangle donné T , t et T sont homologues et (O, D) est l'un des couples que nous avons appris à leur associer.

Cette proposition, comme les précédentes, est relative à des figures formées de triangles dont deux quelconques sont homologues. Peut-être pourrait-on déterminer toutes les figures jouissant de cette propriété.

DÉDUCTION GÉOMÉTRIQUE
DES DÉRIVÉES SUPÉRIEURES
DES FONCTIONS CIRCULAIRES $\sin x$ ET $\cos x$

PAR

J. ARNOVLJEVIC (Belgrade) et B. PETRONIEVIC (Belgrade).

Ayant réussi à déduire géométriquement les dérivées premières des fonctions circulaires ¹, je me suis efforcé d'appliquer le même procédé aux dérivées supérieures de ces fonctions. Mon collègue, M. D^r Ivan Arnovljevic, professeur de Mécanique à la Faculté technique de l'Université de Belgrade, ayant trouvé avant moi une solution géométrique du problème pour la deuxième dérivée des fonctions $\sin x$ et $\cos x$, j'ai utilisé les éléments de sa solution pour arriver à la déduction géométrique de la troisième et des dérivées supérieures de ces deux fonctions.

¹ Comp. B. PETRONIEVIC, Déduction des dérivées de fonctions circulaires par la méthode géométrique des limites. — *L'Enseignement mathématique*, XXII^e année, N^o 3-4, p. 195-208.

La première partie de cet article contient la part de la collaboration importante de M. Arnovljevic; dans la deuxième, je donne d'abord ma solution du problème résolu par M. Arnovljevic, puis la solution générale.

I

Nous allons donner d'abord la déduction géométrique des formules connues

$$\frac{d^2 \sin x}{dx^2} = -\sin x \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \cos x}{dx^2} = \cos x .$$

Dans le cercle de rayon $\overline{OA_0} = 1$ (fig. 1), on a

$$\overline{OA} = \cos x \quad \text{et} \quad \overline{AB} = \sin x ,$$

$$\overline{BB_1} = dx , \quad \overline{C_1 B_1} = d \sin x , \quad \overline{BC_1} = -d \cos x ,$$

De $\Delta B_1 BC_1 \sim OBA$, on déduit

$$\overline{B_1 C_1} : \overline{B_1 B} = \overline{OA} : \overline{OB} \quad \text{et} \quad \overline{BC_1} : \overline{BB_1} = \overline{AB} : \overline{OB} .$$

d'où:

$$d \sin x : dx = \cos x : 1 \quad \text{et} \quad -d \cos x : dx = \sin x : 1 .$$

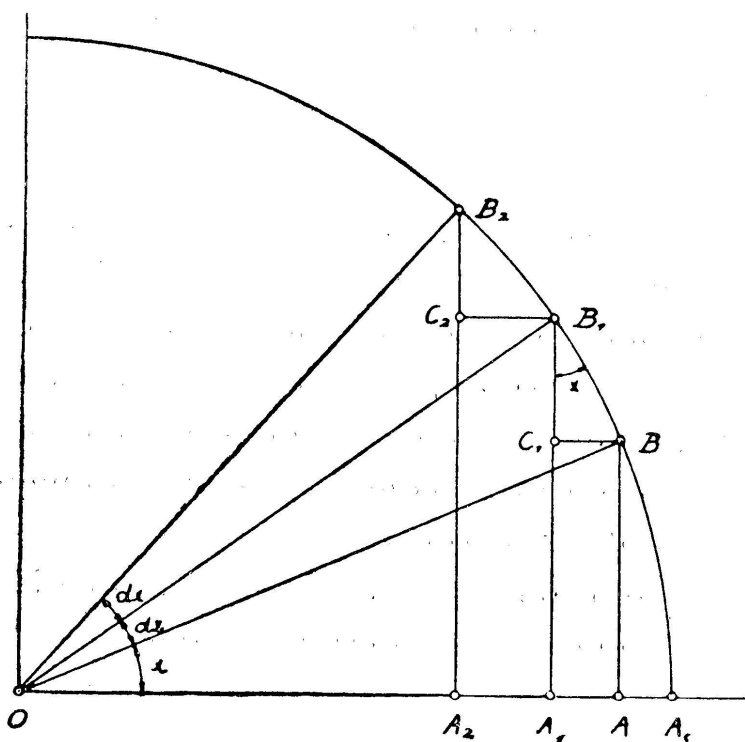


Fig 1

C'est la déduction géométrique de

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \quad \text{et} \quad \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x .$$

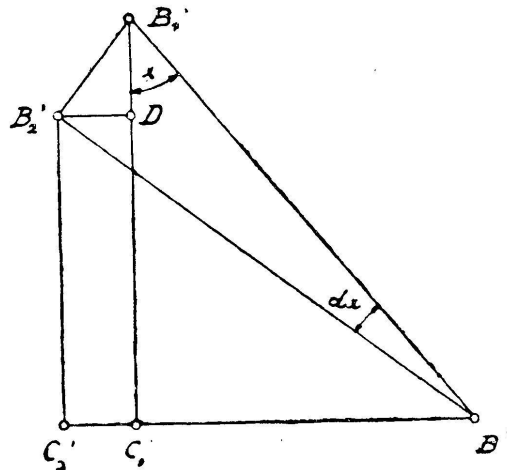


Fig 2

Dans la fig. 2, les deux triangles BB_1C_1 et $B_1B_2C_2$ de la fig. 1 ont été agrandis et tracés de telle sorte que les deux angles B et B_1 coïncident en B' et que les côtés BC_1 (resp. $B'C_1$) et B_1C_2 (resp. $B'C_2$) coïncident aussi.

Alors $B'B_1$ étant $// BB_1$ et $B'B_2 // B_1B_2$, on a: $\sphericalangle B_1B'B_2 = dx$; B_1B_2 étant $// OB_1$ et $B_2D \perp B_1C_1$, on a: $\sphericalangle B_1B_2D = x + dx = x$; et dans le triangle B_2DB_1 on a: $\overline{DB_2} = \overline{C_2B'} - \overline{C_1B'} = -d^2 \cos x$, $\overline{DB_1} = \overline{B_2C_2} - \overline{B_1C_1} = -d^2 \sin x$ et $\overline{B_1B_2} = \overline{B'B_1} \cdot dx = (dx)^2$.

De ΔB_2DB_1 , de la fig. 2 (dont les côtés sont des grandeurs infiniment petites de deuxième ordre), $\sim OAB$ (dans la fig. 1), leurs côtés respectifs devenant parallèles à la limite, on a:

$$\overline{B_1D} : \overline{B_1B_2} = \overline{BA} : \overline{OB} \quad \text{et} \quad \overline{B_2D} : \overline{B_1B_2} = \overline{OA} : \overline{OB}$$

d'où:

$$-d^2 \sin x : dx^2 = \sin x : 1 \quad \text{et} \quad -d^2 \cos x : dx^2 = \cos x : 1 .$$

ou:

$$\frac{d^2 \sin . x}{dx^2} = -\sin x \quad \text{et} \quad \frac{d^2 \cos . x}{dx^2} = -\cos x .$$

II

1. — Dans la fig. 3, on a $PZ = x$, $\overline{OP} = \Delta x$, P est le point de la tangente PT, Q le point de la tangente QT', PS la sécante passant par les points Q et P, PM le sinus de l'arc x (et de l'angle correspondant α), QN le sinus de l'arc $x + \Delta x$ (et de l'angle correspondant $\alpha + \Delta x$), Q'N' le sinus de l'arc $x + 2\Delta x$ (et de l'angle correspondant $\alpha + 2\Delta x$).

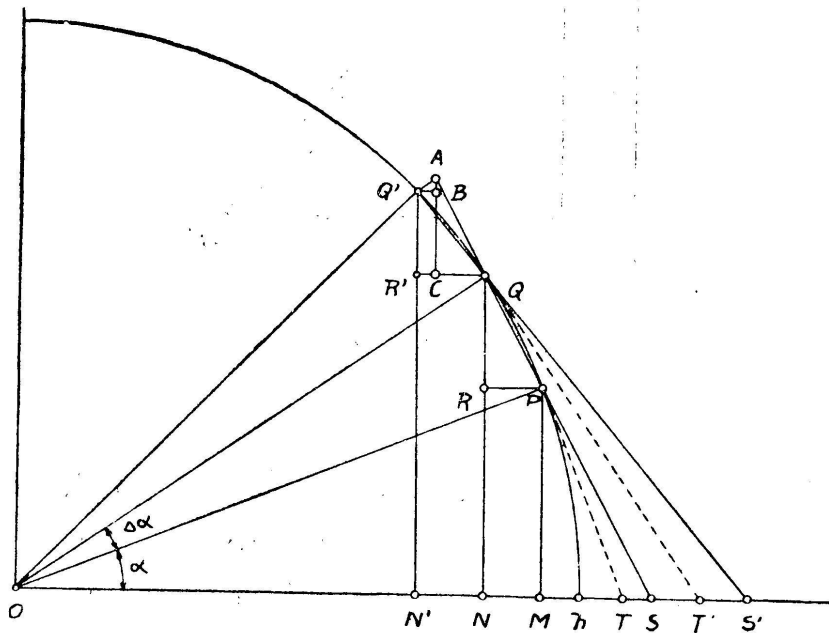


Fig 3

De même on a dans cette figure:

$$\begin{aligned}\Delta \sin x &= \sin(x + \Delta x) - \sin x = NQ - MP = RQ \\ \Delta \sin(x + \Delta x) &= \sin(x + 2\Delta x) - \sin(x + \Delta x) = N'Q' - NQ = R'Q' \\ \Delta \Delta \sin x &= \Delta \sin(x + \Delta x) - \Delta \sin x = R'Q' - RQ = BC - AC = -AB.\end{aligned}$$

Dans le triangle Q'QA, ayant l'arc Q'A pour base, on a: $\widehat{Q'A} = Q'Q \cdot \sphericalangle Q'QA$, et dans le triangle Q'QO, ayant l'arc Q'Q pour base, on a de même: $\widehat{Q'Q} = OQ \cdot \sphericalangle Q'OQ$.

On aura donc:

$$\begin{aligned}\lim Q'A &= \lim \Delta x \cdot \lim \sphericalangle SQS' = \lim \Delta x \cdot \lim \Delta \sphericalangle RQP \\ &= \lim \Delta x \cdot \lim \Delta \alpha\end{aligned}$$

d'où:

$$\lim Q'A = dx \cdot d\alpha = dx^2, \quad (1)$$

Comme le triangle Q'BA coïncide, en passant à la limite, avec le petit triangle non tracé Q'BA', qui est semblable au triangle ON'Q', on aura d'autre part :

$$\lim \sphericalangle AQ'B = \lim \sphericalangle (\alpha + 2\Delta\alpha) = \alpha = x .$$

On a aussi :

$$\lim AB = - \lim \Delta\Delta \sin x = - d^2 \sin x . \quad (2)$$

De même, comme en passant à la limite, $\Delta ON'Q'$ coïncide avec OMP, on aura :

$$\lim \frac{AB}{Q'A} = \lim \frac{PM}{OP} , \quad (3)$$

Des équations (1), (2) et (3), il s'ensuit enfin :

$$\frac{d^2 \sin x}{dx^2} = - \sin x .$$

2. — En suivant la déduction précédente de la seconde dérivée de $\sin x$, on déduira facilement la seconde dérivée de $\cos x$.

Dans la fig. 3, on a :

$$\Delta \cos x = - RP , \quad \Delta \cos (x + \Delta x) = - R'Q , \quad \Delta\Delta \cos x = - R'C .$$

On a de même :

$$\lim Q'A = dx^2 , \quad (1)$$

$$\lim \sphericalangle AQ'B = x ,$$

$$\lim Q'B = d \cos^2 x \quad (2)$$

et

$$\lim \frac{Q'B}{Q'A} = \frac{OM}{OP} . \quad (3)$$

On aura donc enfin :

$$\frac{d^2 \cos x}{dx^2} = - \cos x .$$

3. — Les figures 4 et 4a se rapportent à la troisième dérivée des fonctions $\sin x$ et $\cos x$. Dans la fig. 4a, les triangles R''Q'Q'' et R'Q'A' de la fig. 4 ont été agrandis de telle sorte que le triangle Q''Q'A' contient, non seulement le petit triangle Q''B'A', mais aussi le triangle encore plus petit DEA'.

Dans la fig. 4, mais en tant qu'elle diffère de la fig. 3, Q' est le point de la tangente Q'T'', Q'S'' la sécante passant par les points Q'' et Q', Q''N'' le sinus de l'arc $x + 3\Delta x$ (et de l'angle correspondant $\alpha + 3\Delta\alpha$).

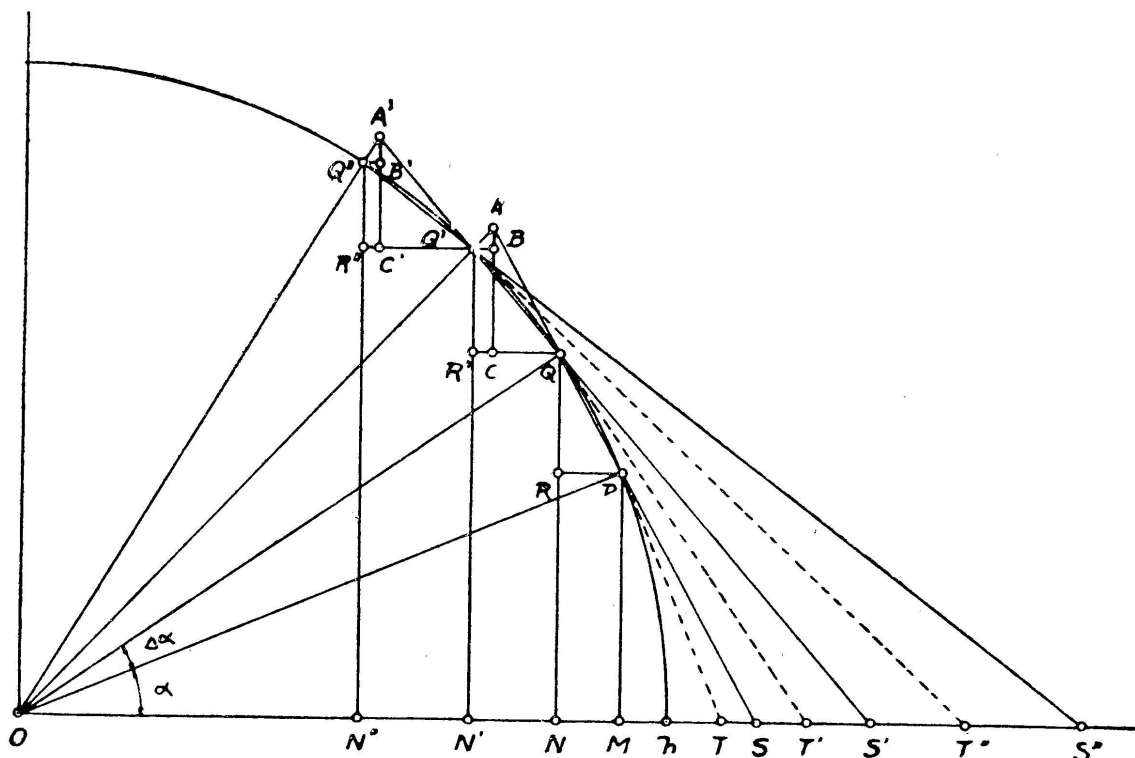


Fig. 4

De même, on a dans la figure 4 :

$$\Delta \sin(x + 2\Delta x) = \sin(x + 3\Delta x) - \sin(x + 2\Delta x) = N''Q'' - N'Q' = R''Q''$$

$$\begin{aligned} \Delta\Delta \sin(x + \Delta x) &= \Delta \sin(x + 2\Delta x) - \Delta \sin(x + \Delta x) \\ &= R''Q'' - R'Q' = -A'B' \end{aligned}$$

$$\Delta\Delta\Delta \sin x = \Delta\Delta \sin(x + \Delta x) - \Delta\Delta \sin x = -A'B' - (-AB) .$$

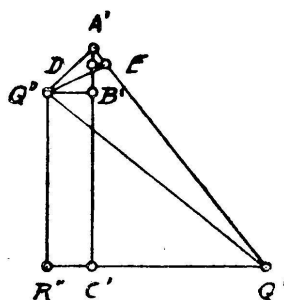


Fig 4a

Comme dans la figure 4 a :

A'B' de la figure 4, représente A'B'
 et AB » » » DB' ,

on a, dans cette figure :

$$\Delta\Delta\Delta \sin x = - A'B' - (- DB') = - A'D .$$

On a aussi dans la figure 4 a :

$$\begin{aligned} \lim A'E &= \lim \widehat{A'E} = \lim Q''A' . \lim \sphericalangle A'Q''E \\ &= \lim \widehat{Q''A'} . \lim \Delta \sphericalangle A'Q''B' , \end{aligned}$$

mais comme, en passant à la limite, $\widehat{Q''A'}$ coïncide (dans la figure 4) avec $Q'A$ et $\sphericalangle A'Q''B'$ avec $AQ'B$, on aura :

$$\lim A'E = \lim Q'A . \lim \Delta \sphericalangle AQ'B = dx^2 . d\alpha = dx^3 , \quad (1)$$

On aura aussi, en passant à la limite ($\Delta DA'E$ étant $\sim \Delta C'A'Q'$),

$$\lim \sphericalangle DA'E = \lim \sphericalangle C'A'Q' = \lim \sphericalangle N'Q'S' = \lim \sphericalangle NQT' = \alpha = x$$

et

$$\lim A'D = - \lim \Delta\Delta\Delta \sin x = - d^3 \sin x . \quad (2)$$

De même, en passant à la limite, $\Delta DA'E$ devient semblable à ΔMPO , et on aura :

$$\lim \frac{A'D}{A'E} = \frac{OM}{OP} . \quad (3)$$

Des équations (1), (2) et (3) il s'ensuit enfin :

$$\frac{d^3 \sin x}{dx^3} = - \cos x .$$

Remarque. — En suivant la déduction de la troisième dérivée de $\sin x$, on déduira facilement la troisième dérivée de $\cos x$.

On aura en effet (dans la fig. 4) :

$$\Delta\Delta \cos x = R''Q' - R'Q = - R''C' ,$$

et

$$\Delta\Delta\Delta \cos x = - R''C' - (- R'C) = DE$$

(dans la figure 4 a, où $Q''B'$ représente $R''C'$, tandis que le segment rectiligne correspondant à $R'C' > R''C$ n'a pas été tracé).

Comme

$$\lim \frac{DE}{A'E} = \frac{PM}{OP} .$$

on aura :

$$\frac{d^3 \cos . x}{dx^3} = \sin x .$$

4. — En suivant la déduction des deuxième et troisième dérivées de $\sin x$, on déduira facilement la quatrième dérivée, et ainsi de suite.

On s'apercevra aussi (comp. fig. 3 et 4) que, si cette déduction porte sur la dérivée de l'ordre pair, l'angle du petit triangle (dont les différences $\Delta^n y$ et Δx^n sont des côtés), qui correspond à l'angle α , sera orienté dans le même sens que celui-ci, tandis que, s'il s'agit de la dérivée de l'ordre impair, cet angle sera orienté dans le sens de l'angle NQS. D'où la différence dans le procédé de démonstration des deux cas.

On pourrait démontrer que, tandis que $\Delta^2 \sin x$ et $\Delta^3 \sin x$ sont négatifs, la différence $\Delta^4 \sin x$ sera positive. Mais alors, comme la valeur absolue de la deuxième dérivée et de chaque dérivée de l'ordre pair de la fonction $\sin x$ est $\sin x$ et celle de la troisième et de chaque dérivée de l'ordre impair $\cos x$, la valeur de la quatrième dérivée sera $+\sin x$, et les valeurs $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$ se succéderont périodiquement à partir de la cinquième dérivée. Et la même remarque s'applique aux valeurs $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$, $\cos x$ par rapport à la fonction $\cos x$.

Remarque. — Nous terminerons notre travail par une remarque. Comme on le sait, l'objection la plus sérieuse au calcul différentiel de LEIBNIZ était celle faite par le Hollandais B. NIEUWENTIJT : les dérivées supérieures d'une fonction ne peuvent pas exister, étant donné qu'elles ne possèdent pas de signification géométrique¹. Or, dans notre travail, nous avons établi, pour la première fois d'une manière incontestable, l'existence géométrique des dérivées supérieures d'une fonction.

¹ L'objection se trouve dans l'ouvrage de NIEUWENTIJT, intitulé *Analysis infinitorum*, 1695, Cap. VIII, et la réponse de LEIBNIZ dans *Acta Eruditorum*, 1695 (une traduction de cette réponse se trouve dans le livre de J. M. CHILD, *The Early mathematical papers of Leibniz*, London, 1920). Comp. aussi M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. III, 2te Aufl., S. 254-56.