Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 23 (1923)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES TRIANGLES HOMOLOGIQUES
Autor: Lebesgue, Henri
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19745

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 20.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR LES TRIANGLES HOMOLOGIQUES

PAR

Henri LEBESGUE (Paris).

---

1. — M. J. KARIYA a démontré (*Enseignement mathématique*, t. VI, mars 1904) un théorème qu'on peut énoncer comme il suit:

Soient a, b, c les points de contact avec les côtés d'un triangle ABC de l'un des cercles inscrits dans ce triangle. Soit O *le centre de ce cercle, soit a' b' c' un triangle homothétique de a b c par rapport à* O. *ABC* et *a' b' c' sont homologiques* [1].

L'énoncé précédent nous apprend qu'*étant donnés deux triangles* T *et* t;

a) qui sont homologiques;

b) et tels que t *soit inscrit dans* T,

on peut, et d'une infinité de manières, déterminer un point O *et une droite* D *de façon que* T *soit homologique de tout triangle* t' *qui se déduit de* t *par n'importe laquelle des homologies de centre* O *et d'axe* D *(homologies* O, D*).*

Le cas considéré par M. Kariya, qui est celui où la conique $\mathcal{C}$ inscrite dans T et circonscrite à t se réduit à une cercle de centre O, nous montre, en effet, que l'*on peut prendre pour* O *n'importe quel point du plan, à condition de prendre pour* D *la polaire de* O *par rapport à* $\mathcal{C}$.

On peut donner à l'énoncé précédent une plus grande portée

---

[1] J'ai eu connaissance de cette proposition par un article de M. A. AMIEL paru dans le dernier numéro de l'*Enseignement mathématique* (t. XXIII, nos 3-4), dans lequel l'auteur donne un théorème en quelque sorte corrélatif de celui de M. KARIYA.

Pour m'assurer que les remarques qu'on va lire n'avaient pas été soumises déjà aux lecteurs de cette revue, j'en ai feuilleté la collection. Je me suis ainsi aperçu que le théorème de Kariya avait été l'occasion de multiples communications qu'on trouvera, non seulement dans le no de mai 1904 cité par M. Amiel, mais dans les tomes VI et VII tout entiers. En particulier, il a échappé à M. Amiel que son énoncé avait déjà été démontré en 1905 par M. TABAKOFF.

apparente en remarquant que, O et D étant pôle et polaire par rapport à $\mathcal{C}$, si T′ et t″ se déduisent de T et t par des homologies (O, D), distinctes ou non, T′ et t″ sont homologiques; en effet, effectuons d'abord sur T et t celle des homologies (O, D) qui transforme T en T′; t devient alors t′. Appliquons maintenant le théorème précédent à T′ et t′, en effectuant sur t′ celle des homologies (O, D) qui le transforme en t″, nous aurons prouvé l'homologie de T′ et t″. On pourra, en particulier, inverser le rôle de T et t dans l'énoncé précédent et énoncer que t est homologique de tout transformé de T par une homologie (O, D) [1].

Ainsi le théorème précédent est susceptible d'énoncés divers qui sont conséquences les uns des autres; je m'en tiendrai dans la suite à la forme donnée ci-dessus à ce théorème. Et je vais étudier s'il reste vrai quand on renonce à la condition *b*); T et t deviennent alors deux triangles homologiques qui, en dépit de la forme de l'énoncé, jouent exactement le même rôle [2]. Nous allons voir que l'énoncé subsiste et nous déterminerons tous les couples (O, D) que nous trouverons liés, dans le cas général, tout à fait de la même manière que dans le cas particulier examiné par M. Kariya [3].

2. — Considérons deux triangles ABC ou T, *abc* ou t, homologiques par rapport à un centre Ω et soit O un point de leur plan; demandons-nous si l'on peut associer à O une droite D définissant des homologies satisfaisant à l'énoncé précédent. Soit γ le point de rencontre, inconnu, de D et de *ab*; une droite quelconque issue de γ rencontre O*a* et O*b* en deux points *a*′, *b*′ qui sont deux sommets de l'un des triangles, *a*′ *b*′ *c*′ ou t′, que nous avons à considérer. Le centre de l'homologie transformant T en t′ est le point de rencontre ω de A*a*′ et B*b*′. Lorsque γ est connu le lieu de ω est, d'après cela, une conique (γ) passant par A, B, O, Ω. Pour qu'une droite D réponde à la

---

[1] Pour le cas où $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O, cette dernière forme de la proposition est celle de MM. TABAKOFF et AMIEL. Un énoncé de M. FRANKE, et sa réciproque formulée par M. Tabakoff, se relient de la même manière à l'énoncé de M. KARIYA.

[2] Il est clair qu'on ne saurait renoncer à la condition *a*).

[3] Pour éviter tout malentendu, je fais observer que nous n'avons pas à rechercher dans quel cas des homologies forment un groupe. Nous avons bien à considérer l'opération résultant de l'homologie qui transforme T en t, suivie de celle qui transforme t en t′; mais nous appliquons ces opérations seulement aux trois sommets de T.

question, il faut et il suffit que de ses points de rencontre γ, α, β avec ab, bc, ca on déduise trois coniques (γ), (α), (β) qui soient confondues. Il est nécessaire et suffisant pour cela que (γ) passe par C, (α) par A, (β) par B; car alors (α), (β), (γ) sont toutes trois déterminées par les 5 mêmes points A, B, C, O, Ω.

Voyons donc quel doit être γ pour que (γ) passe par C. Si ω vient en C, Aa' et Bb' sont devenues AC et BC donc a' et b' sont respectivement aux points de rencontre a'_1, b'_1 de Da et de AC, de Ob et de BC. La droite a'_1, b'_1, est connue, elle coupe $a\ b$ au point γ qui est ainsi déterminé. α est de même déterminé par la rencontre d'une droite $b'_2 c'_2$ et de bc, β par la rencontre de $c'_3 a'_3$ et de ac.

Ainsi, si les points α, β, γ sont en ligne droite, au point O est associé une droite D et une seule: la droite $\alpha\beta\gamma$. Or on va vérifier que α, β, γ sont toujours en ligne droite. Je ferai cette vérification par le calcul ce qui me donnera de suite la correspondance O, D.

Soient les équations

$$x = 0 \quad \text{pour} \quad bc\ , \qquad y = 0 \quad \text{pour} \quad ca\ , \qquad z = 0 \quad \text{pour} \quad ab\ ;$$

et

$$ux + vy + wz = 0$$

pour l'axe d'homologie de T et t. Les côtés de T ont pour équation

$$\begin{aligned} (u + u_1)x + vy + wz &= 0\ , \qquad \text{BC}\ , \\ ux + (v + v_1)y + wz &= 0\ , \qquad \text{CA}\ , \\ ux + vy + (w + w_1) &= 0\ , \qquad \text{AB}\ , \end{aligned}$$

Soient x_0, y_0, z_0, les coordonnées de O; celles de a'_1 vérifieront l'équation de CA et la relation

$$\frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}\ ;$$

donc ce sont

$$(v + v_1)y_0 + wz_0\ , \qquad -uy_0\ , \qquad -uz_0\ .$$

L'équation de a'_1, b'_1, est donc:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ (v + v_1)y_0 + wz_0 & -uy_0 & -uz_0 \\ -vx_0 & (u + u_1)x_0 + wz_0 & -vz_0 \end{vmatrix} = 0\ ,$$

et comme le z de γ est nul, on a pour les coordonnées de γ

$$u[(u+u_1)x_0+vy_0+wz_0]\ ,\quad -v[ux_0+(v+v_1)y_0+wz_0]\ ,\quad 0$$

de même pour β et α on a:

$$\begin{matrix} -w[ux_0+vy_0+(w+w_1)z_0]\ , & 0 & v[ux_0+(v+v_1)y_0+wz_0]\ ; \\ 0\ , & w[ux_0+vy_0+(w+w_1)z_0]\ , & -u[(u+u_1)x_0+vy_0+wz_0]\ . \end{matrix}$$

Le déterminant de ces coordonnées est d'ordre 3, il est symétrique gauche, donc il est nul. α, β, γ sont en ligne droite; à tout point O est associé une droite D dont l'équation a pour coefficients de x, y, z, les mineurs de la matrice formée par les coordonnées de β et α. Donc l'équation de D est:

$$\begin{aligned} O = u[(u+u_1)x_0+vy_0+wz_0]x + v[ux_0+(v+v_1)y_0+wz_0]y \\ + w[ux_0+vy_0+(w+w_1)z_0]z\ . \end{aligned}$$

D passe par O, quand O est point de la conique $\mathcal{C}$.

$$\begin{aligned} u[(u+u_1)x+vy+wz]x + v[ux+(v+v_1)y+wz]y \\ + w[ux+vy+(w+w_1)z]z = 0\ . \end{aligned}$$

Or il est clair que l'équation de D s'écrit:

$$x\times\frac{1}{2}\mathcal{C}'_{x_0}+y\times\frac{1}{2}\mathcal{C}'_{y_0}+z\times\frac{1}{2}\mathcal{C}'_{z_0}=0\ .$$

Donc O *et* D *sont pôle et polaire par rapport à* $\mathcal{C}$.

Et la valeur trouvée pour $\frac{1}{2}\mathcal{C}'_x$ montre que la droite $\frac{1}{2}\mathcal{C}'_x=0$, c'est-à-dire la polaire de a, est la droite BC. Ainsi *la conique* $\mathcal{C}$ *est celle par rapport à laquelle* T *et* t *sont polaires réciproques.*

3. — Cet énoncé généralise bien celui que nous avons déduit du théorème de M. Kariya; au reste il n'était pas difficile à prévoir si l'on songeait qu'une transformation par polaire réciproque par rapport à $\mathcal{C}$ inversait T et t et transformait une homologie (O, D) répondant à la question en une homologie y répondant également et qui avait pour centre le pôle de D et pour axe la polaire de O. Guidé par cette prévision du résultat à démontrer on peut remplacer l'analyse précédente par le raisonnement synthétique suivant.

Nous voulons prouver que *si O et D sont pôle et polaire par rapport à la conique $\mathcal{C}$ par rapport à laquelle deux triangles homologiques* T *et* t *sont polaires réciproques, le couple* (*O*, *D*) *définit des homologies qui transforment* t *en triangles homologiques avec* T [1].

Raisonnons sur une représentation du plan projectif dans laquelle $\mathcal{C}$ est une circonférence de centre O. Alors O a est perpendiculaire à BC et le coupe en un point A_1; de même O b et O c sont respectivement perpendiculaires à CA, AB et les coupent en B_1 et C_1. On a:

$$Oa \times OA_1 = Ob \times OB_1 = Oc \times OC_1 .$$

Si maintenant on remplace T et t par des homothétiques T′ et t″ par rapport à O, les relations de perpendicularité restent les mêmes et l'on a:

$$Oa''.OA_1' = Ob''.OB_1' = Oc''.OC_1' .$$

Donc a'' b'' c'' ou t″ et A′ B′ C′ ou T′ sont polaires réciproques par rapport à un cercle de centre O, donc sont homologiques.

Ce mode de raisonnement, qui s'applique de suite à l'énoncé de M. Kariya, comme aussi à ceux de MM. Franke, Tabakoff et Amiel auxquels j'ai fait allusion, est, sinon le plus élémentaire de ceux qui ont été proposés, du moins le plus immédiat et le plus clair.

Il exige que l'on sache démontrer l'homologie de deux triangles $a\,b\,c$, A B C polaires réciproques par rapport à une circonférence de centre O. Soient α, β, γ les points de rencontre de bc et BC, de ca et CA, de ab et AB. Soit ω le point de rencontre de bc et de aA. Le rapport anharmonique des quatre droites concourrantes Aα, AB, AC, Aa, est celui de leurs pôles

$$\omega\,,\quad c\,,\quad b\,,\quad \alpha\,,$$

donc celui de

$$\alpha\,,\quad b\,,\quad c\,,\quad \omega\,,$$

donc celui de

$$a\alpha\,,\quad ab\,,\quad ac\,,\quad a\omega\,.$$

[1] Je laisse maintenant de côté la question, précédemment traitée, de savoir si ces couples (O, D) sont les seuls répondant à la question.

Et puisque Aa et $a\omega$ coïncident, les points α, β, γ, déterminés par la rencontre de Aα avec $a\alpha$, de AC avec ac, de AB avec ab, sont en ligne droite.

4. — Des raisonnements du paragraphe 2 on déduira de suite que si trois homologies (O, D) transforment un triangle t en triangles homologiques avec un triangle donné T, t et T sont homologiques et (O, D) est l'un des couples que nous avons appris à leur associer.

Cette proposition, comme les précédentes, est relative à des figures formées de triangles dont deux quelconques sont homologiques. Peut-être pourrait-on déterminer toutes les figures jouissant de cette propriété.

DÉDUCTION GÉOMÉTRIQUE DES DÉRIVÉES SUPÉRIEURES DES FONCTIONS CIRCULAIRES $\sin x$ ET $\cos x$

PAR

J. ARNOVLJEVIC (Belgrade) et B. PETRONIEVICS (Belgrade).

Ayant réussi à déduire géométriquement les dérivées premières des fonctions circulaires [1], je me suis efforcé d'appliquer le même procédé aux dérivées supérieures de ces fonctions. Mon collègue, M. Dr Ivan Arnovljevic, professeur de Mécanique à la Faculté technique de l'Université de Belgrade, ayant trouvé avant moi une solution géométrique du problème pour la deuxième dérivée des fonctions $\sin x$ et $\cos x$, j'ai utilisé les éléments de sa solution pour arriver à la déduction géométrique de la troisième et des dérivées supérieures de ces deux fonctions.

---

[1] Comp. B. PETRONIEVICS, Déduction des dérivées de fonctions circulaires par la méthode géométrique des limites. — *L'Enseignement mathématique*, XXIIe année, N° 3-4, p. 195-208.