Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 23 (1923)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPRIÉTÉS INVOLUTIVES D'UN SYSTÈME DE SECTIONS CONIQUES

Autor: Mercier, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19744

PROPRIÉTÉS INVOLUTIVES D'UN SYSTÈME DE SECTIONS CONIQUES

A propos du problème du cadran solaire.

PAR

P. Mercier (Genève).

Le problème qui fait l'objet de cette étude se présente lorsque l'on examine les propriétés géométriques des cadrans solaires. On sait qu'au cours d'une journée l'ombre portée par l'extrémité du style sur le plan du cadran décrit une courbe que l'on appelle arc diurne. Si l'on néglige la variation de la déclinaison du soleil pendant cette journée, cet arc diurne est simplement l'intersection avec le plan du cadran d'un cône droit ayant pour sommet l'extrémité du style, l'axe de ce cône étant parallèle à l'axe du monde et ses génératrices s'appuyant sur le cercle apparent décrit par le soleil. Il en résulte que l'on peut choisir l'orientation et l'inclinaison du plan du cadran de telle manière que, suivant l'époque de l'année, l'arc diurne décrit soit un arc d'hyperbole, de parabole ou d'ellipse. Il est évident qu'à l'équinoxe la déclinaison du soleil étant nulle, le cône se réduit à un plan parallèle à l'équateur dont l'intersection avec le plan du cadran est une droite appelée équinoxiale.

La question qui se pose alors à l'esprit est de trouver les relations générales appartenant à ce système de coniques et pour cela il convient de considérer le problème dans toute sa généralité, c'est-à-dire au point de vue purement géométrique.

Désignant sous le nom de faisceau de cônes droits un système composé d'une infinité de cônes droits à deux nappes ayant même axe, même sommet et remplissant tout l'espace, l'énoncé du problème devient: *Etant donné un faisceau de cônes droits, on coupe ce système par un plan quelconque. On demande de déterminer les propriétés géométriques caractérisant le réseau de sections coniques ainsi obtenu.*

Considérons (v. fig.) un plan π et une droite s inclinée d'un angle quelconque γ par rapport à ce plan. Soit P l'intersection de s avec le plan π. Choisissons sur s un point quelconque S comme sommet d'un faisceau de cônes droits ayant pour axe la droite s. Il est aisé de construire l'intersection d'un cône quelconque de ce système avec le plan π si l'on fait usage de la remarque suivante:

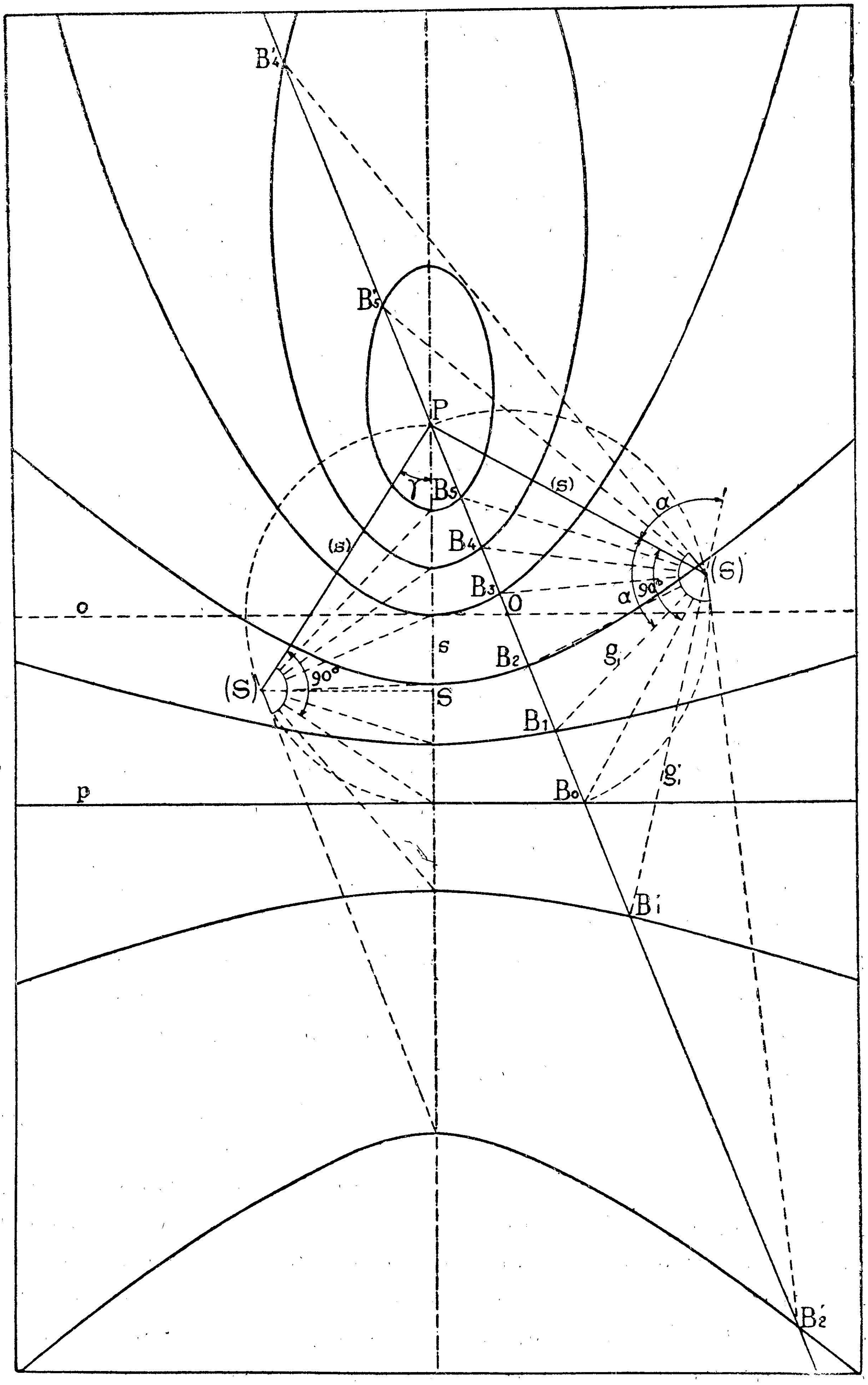
Le cône dont la demi-ouverture est égale à 90° se réduit à un plan perpendiculaire à s et passant par le point S. Il coupe le plan π suivant la droite p. Une droite quelconque b passant par P contenue dans le plan π, détermine avec l'axe s un plan auxiliaire qui coupe un cône du faisceau ayant pour demi-ouverture l'angle α suivant deux génératrices et la droite p en un point B_0. Le triangle B_0SP, contenu dans le plan auxiliaire bs, est rectangle en S, ce qui permet de construire son rabattement sur le plan π autour de b comme charnière.

Le plan auxiliaire bs étant rabattu, on peut mener par (S) les deux génératrices g_1 et g_1' qui y sont contenues et trouver leur intersection avec la droite b, ce qui donne deux points B_1, B_1', de la section conique considérée.

En faisant varier la position du plan auxiliaire passant par s et en procédant de la même manière, on obtient l'intersection complète du cône dont la demi-ouverture est α avec le plan π.

On sait (Théorème de Dandelin) que cette intersection est une hyperbole si l'on a $\alpha > \gamma$, dans ce cas le plan π coupe les deux nappes du cône. C'est une parabole si $\alpha = \gamma$, le plan π est alors parallèle à une génératrice du cône. Enfin c'est une ellipse si $\alpha < \gamma$, le plan π ne coupant qu'une nappe du cône. En faisant varier la demi-ouverture α du cône de 0 à 90°, on obtient sur le plan π un réseau de coniques dont on a figuré quelques unes sur la figure.

Considérons le point d'intersection de la droite b avec le réseau de coniques. Chaque conique du réseau est coupée par cette droite en deux points qui peuvent être considérés comme corres-



π plan du tableau. — s projection orthogonale de l'axe s sur le plan π. — S projection orthogonale du sommet du faisceau de cônes sur le plan π. — (s) à gauche: Rabattement de l'axe s sur le plan π autour de sa projection. — (s) à droite: Rabattement de l'axe s sur le plan π autour de b comme charnière. — p intersection avec le plan π du cône dont la demi-ouverture est égale à 90°. — $B_0 B_1 B_2 B_3$ .... $B_0 B_1 B_2 B_3$.... involution de points sur la droite b. — o lieu géométrique des centres des involutions de points considérées.

pondants. On obtient ainsi deux ponctuelles $B_0B_1B_2B_3 \ldots$ et $B_0B_1'B_2'B_3' \ldots.$

Théorème I. — *Une droite quelconque* b *contenue dans le plan* π *et passant par le point* P *coupe le réseau de coniques suivant deux ponctuelles* $B_0B_1B_2B_3 \ldots B_0B_1'B_2'B_3' \ldots$ qui forment une *involution hyperbolique de points dont le centre* O *est le milieu du segment* $\overline{PB_0}$ *et la puissance* $p = \overline{OB_0}^2 = \overline{OP}^2$.

Il suffit de démontrer que le produit des distances au point O de deux points correspondants est constant, c'est-à-dire que l'on a $OB_1 . OB_1' = OB_2 . OB_2' = \ldots. = \overline{OP}^2$.

Cette propriété peut être démontrée facilement, mais il est plus simple de remarquer que lorsqu'on coupe un faisceau de cônes droits par un plan passant par son axe, chaque cône est coupé suivant deux génératrices qui peuvent être considérées comme deux rayons correspondants de deux faisceaux symétriques par rapport à l'axe du cône. Ces deux faisceaux constituent une involution de rayons dont les rayons doubles sont perpendiculaires. Si l'on coupe cette involution de rayons par une droite quelconque, on obtient une involution de points dont les points doubles correspondent aux rayons doubles.

C'est précisément ce qui se présente dans notre cas, le plan auxiliaire *bs* coupe le faisceau de cônes suivant une involution de rayons et la droite *b* est coupée par cette involution de rayons suivant une involution de points. Le cône dont l'ouverture est égale à zéro se réduit à son axe. C'est un rayon double de l'involution de rayons contenue dans le plan *bs*. Le cône dont la demi-ouverture est égale à $90°$ se réduit à un plan perpendiculaire à l'axe dont l'intersection avec le plan π est la droite *p*. Ce plan, perpendiculaire à l'axe est coupé par le plan *bs* suivant deux génératrices qui sont confondues et constituent l'autre rayon double. Il est évident que la droite *b* coupe les rayons doubles en P et B_0 qui sont les points doubles de l'involution de points. Le centre de l'involution est le point O, milieu du segment PB_0. Cette involution est hyperbolique car deux points conjugués sont toujours situés d'un même côté du centre.

Théorème II. — *Si l'on choisit comme pôle le point* P, *la droite* p *est la polaire de toutes les coniques du réseau.*

En effet si l'on modifie d'une façon quelconque la position de la droite b dans le plan π en l'astreignant toutefois à passer par le point P, elle coupera le réseau de coniques suivant une nouvelle involution de points dont les points doubles coïncident l'un avec P, l'autre avec l'intersection de p avec la droite b dans sa nouvelle position. Il en résulte que le point P et la droite p sont le lieu géométrique des points doubles de toutes les involutions de points obtenues en coupant le réseau de coniques par une droite quelconque b passant par le point P.

On sait que dans une involution hyperbolique, toutes les paires de points sont conjuguées harmoniques par rapport aux points doubles; il en résulte que la droite p est la polaire d'une conique quelconque du réseau par rapport au point P pris comme pôle. On sait en effet que si par un point P pris dans le plan d'une conique on mène des cordes qui déterminent sur la courbe des paires de points, le lieu des conjugués harmoniques de P par rapport aux extrémités de chaque corde, est une droite qui est la polaire de P par rapport à cette conique.

Cas particulier. — Lorsque l'axe du faisceau de cônes droits est perpendiculaire au plan, le réseau de coniques devient un réseau de cercles concentriques. La droite de l'infini est la polaire de tous ces cercles, leur centre commun étant choisi comme pôle.

Revenons au cadran solaire. Le problème physique est plus restreint que le problème géométrique en ce sens que la variation de la déclinaison du soleil est limitée à $\pm$ 23°28′. Il faut en outre observer que sur le cadran solaire les arcs diurnes correspondant à des déclinaisons du soleil égales et de signe contraire appartiennent géométriquement à une même section conique. En tenant compte de ces remarques, on peut traduire les résultats obtenus en employant les termes utilisés en Gnomonique. Le point P devient le centre du cadran, la droite p est l'équinoxiale, le réseau des sections coniques est constitué par l'ensemble des arcs diurnes et le Théorème II devient:

L'équinoxiale est la polaire des arcs diurnes par rapport au centre du cadran pris comme pôle.