Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 23 (1923)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA PÉDAGOGIE DES THÉORIES D'EINSTEIN
Autor: Buhl, A.
Kapitel: VIII. — Métrique. Courbure. Gravitation.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19743

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 26.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

VIII. — Métrique. Courbure. Gravitation.

Maintenant que nous avons constaté que la dérivation d'expressions à deux indices conduisait à percevoir l'existence d'une forme quadratique (28), il reste à s'expliquer sur les coefficients g_{ij} de celle-ci et sur le choix des fonctions Γ jusqu'ici complètement indéterminées. C'est là que peuvent intervenir diverses hypothèses auxquelles correspondent diverses théories gravifiques.

L'hypothèse la plus simple, à laquelle correspond la géométrie de Riemann, consiste à admettre que toutes les dérivées en D des g_{ij} sont nulles. Ceci entraîne, d'après les formules du paragraphe VI, que des g^{ij} et des g^i_j ont également leurs dérivées en D identiquement nulles, si g^{ij} est le quotient par g du mineur de g_{ij} dans le déterminant g des g_{ij} et si

$$g^i_j = g^{\alpha i} g_{\alpha j} = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad i \neq j \\ 1, & \text{si} \quad i = j \end{cases} . \tag{32}$$

Rappelons que l'équation

$$\frac{D}{Dx_i} g_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} - g_{j\alpha} \Gamma^\alpha_{ik} - g_{\alpha k} \Gamma^\alpha_{ij} = 0 ,$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk} - \begin{bmatrix} i\,k \\ j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i\,j \\ k \end{bmatrix} = 0 ,$$

donne

$$2 \begin{bmatrix} i\,j \\ k \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} .$$

On a ainsi

$$\Gamma^\alpha_{ik} = \begin{Bmatrix} i\,k \\ \alpha \end{Bmatrix} = g^{\alpha\beta} \begin{bmatrix} i\,k \\ \beta \end{bmatrix} .$$

Les B à quatre indices exprimés en (31) sont alors les composantes de la courbure riemannienne, courbure dont la théorie pourrait être ici esquissée rapidement. Allons plus directement au but en utilisant l'opérateur (32) qui, aux B à quatre indices, fera correspondre des G à deux indices seulement (contraction; *Verjüngung*), soit

$$G_{\alpha i} = g^k_j B^k_{\alpha ij} .$$

Ces G sont encore des composantes de courbure, ce que, par exemple, on peut vérifier aisément dans le cas d'une surface ordinaire sur laquelle on aurait

$$ds^2 = g_{11}\, dx_1^2 + 2g_{12}\, dx_1\, dx_2 + g_{22}\, dx_2^2 \,.$$

Alors $g^{\alpha i}\, G_{\alpha i}$ correspond à la courbure totale de la surface.

Pour revenir au cas général, l'essentiel est que l'on tient maintenant des $G_{\alpha i}$ et des $g_{\alpha i}$ qui sont en même nombre (10 dans E_4); l'équation

$$G_{\alpha i} = 0 \,, \tag{33}$$

qui est la plus simple des lois de gravitation, exprime un mode de courbure de l'espace-temps qui est vraisemblablement le plus simple. Cette équation permet la détermination des $g_{\alpha i}$, c'est-à-dire d'un ds^2 auquel correspondent des géodésiques-trajectoires, etc.

Nous n'irons pas plus loin dans cette voie car l'exposition que nous aurions à faire pour continuer ne différerait pas de celles déjà faites par maints auteurs.

Terminons par quelques remarques analytiques.

Pour arriver à (33), il vaut mieux passer par (30) que par (29). En effet, former les G à partir de (29) c'est faire, dans le second membre $\alpha = i$, opération impossible à indiquer sur le premier membre qui ne porte pas explicitement l'indice α. Il en est autrement, avec (30), pour $k = j$ et l'on pourrait même énoncer la loi de gravitation (33) sous cette forme: *les expressions*

$$\begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_i} & \dfrac{D}{Dx_j} \\[2ex] \dfrac{DP^j}{Dx_i} & \dfrac{DP^i}{Dx_j} \end{vmatrix}$$

sont nulles, quel que soit le vecteur P. Sous cette physionomie, on voit combien la loi est proche des formules stokiennes fondamentales qui ont également servi de base à l'électromagnétisme.

Soyons également très bref sur les déjà nombreuses extensions des théories einsteiniennes. Ainsi A.-S. Eddington (*Math. Theory*, p. 217) pose

$$\frac{D}{Dx_i}\, g_{jk} = 2K_{jk,i}$$

en faisant naître cette formule de considérations métriques inutiles à invoquer ici comme base.

Si $K_{jk.i} = g_{jk} \varkappa_i$, on retrouve la métrique de Weyl; pour $\varkappa_i$ nul celle de Riemann.

IX. — Bibliographie.

Nous n'indiquons ici que les écrits auxquels nous avons fait un emprunt précis pour la rédaction de ce qui précède. Les auteurs sont rangés par ordre alphabétique ce qui ne nous empêche point de mentionner que ceux qui ont joué le rôle le plus important sont MM. Th. De Donder, A.-S. Eddington, H. Weyl.

A. Buhl. 1° *Sur les formules fondamentales de l'Electromagnétisme et de la Gravifique.* Trois Mémoires (« Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse », 1920–1921–1923). 2° *Les Théories einsteiniennes et les Principes du Calcul intégral* (« Journal de Mathématiques pures et appliquées », 1922).

E. Cartan. 1° *Leçons sur les Invariants intégraux* (J. Hermann, Paris, 1922). Exposé systématique relatif surtout aux formes différentielles. La « dérivation extérieure » revient à la construction des formules stokiennes. Voir une analyse de l'ouvrage dans *L'Enseign. math.* (1921–22, p. 389). 2° *Sur les variétés à connexion affine et la Théorie de la Relativité généralisée* (« Annales de l'Ecole Normale, 1923). Travail qui, parmi les nombreuses publications de M. Cartan sur le sujet, paraît tout particulièrement d'envergure prodigieuse. Le point de départ est celui que nous avons toujours adopté. « Au fond, écrit M. Cartan (*loc. cit.*, p. 329), les lois de la Dynamique des milieux continus et celles de l'Electromagnétisme s'expriment par des équations analogues à la formule de Stokes ou à cette formule généralisée ».

Th. De Donder. 1° *Théorie du champ électro-magnétique de Maxwell-Lorentz et du champ gravifique d'Einstein.* 2° *La Gravifique einsteinienne* (Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1920 et 1921). Le premier de ces ouvrages donne les formules (14) et (15) ainsi que toute une théorie précisée dans le second et définitive-