Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 23 (1923)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA PÉDAGOGIE DES THÉORIES D'EINSTEIN

Autor: Buhl, A.

Kapitel: VI. — Dérivées en D d'expressions a deux indices.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19743

Pour l'éloignement tout le monde admet cela; en quoi est-ce plus étrange pour la vitesse ? Rien de plus suggestif que cet exact rapprochement entre la perspective ordinaire et la cinématique lorentzienne.

VI. — Dérivées en D d'expressions a deux indices.

Revenons maintenant à la seconde formule stokienne (3) et plus particulièrement à son déterminant Δ_2 qui nous a déjà donné le champ électromagnétique général. Il s'agit de lui faire donner les formules de gravitation proprement dites.

Considérons, dans Δ_2, les mineurs des termes de la première ligne. On ne les altère pas en les écrivant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ M_{i\omega} & M_{j\omega} & M_{k\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^{\alpha}_{i\omega} & \Gamma^{\alpha}_{j\omega} & \Gamma^{\alpha}_{k\omega} \\ M_{i\alpha} & M_{j\alpha} & M_{k\alpha} \\ i & j & k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^{\alpha}_{i\omega} & \Gamma^{\alpha}_{j\omega} & \Gamma^{\alpha}_{k\omega} \\ i & j & k \\ M_{\alpha i} & M_{\alpha j} & M_{\alpha k} \end{vmatrix}$$

car les deux derniers déterminants sont identiquement nuls. Bien entendu on a toujours l'hypothèse (7) et les i, j, k libres viennent, dans les développements, prendre la place des ω. Remarquons aussi tout de suite, que les présents raisonnements ne supposent plus aucune relation entre M_{ij} et M_{ji}.

Convenons maintenant que l'expression précédente, à trois déterminants, s'écrive

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} & \frac{D}{Dx_k} \\ M_{i\omega} & M_{j\omega} & M_{k\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix} . \tag{24}$$

La simple identification donne des formules rentrant toutes dans le type

$$\frac{D}{Dx_i} M_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_i} M_{jk} - \Gamma^{\alpha}_{ik} M_{j\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{ij} M_{\alpha k} . \tag{25}$$

On peut ensuite étendre les raisonnements du paragraphe II. Dans (24) et dans l'expression qui précède (24) relevons partout les deux indices des M cependant que, dans les Γ, on échangera α et ω.

Les déterminants contenant les Γ seront, de plus, changés de signe.

On définit ainsi des M^{jk} à dériver par la formule

$$\frac{D}{Dx_i} M^{jk} = \frac{\partial}{\partial x_i} M^{jk} + \Gamma^k_{i\alpha} M^{j\alpha} + \Gamma^j_{i\alpha} M^{\alpha k} . \qquad (26)$$

Dans ce second cas, les déterminants en Γ ne sont pas nuls mais on achève de justifier (26) en remarquant que

$$N^{jk} \frac{D}{Dx_i} M_{jk} + M_{jk} \frac{D}{Dx_i} N^{jk} = \frac{\partial}{\partial x_i} (N^{jk} M_{jk})$$

si j, k, α sont indices de sommation.

Enfin reprenons l'égalité de (24) et des trois déterminants qui précèdent (24). Dans (24) et les deux premiers déterminants des trois autres relevons les indices i, j, k des M, sans toucher aux Γ; dans le dernier déterminant, relevons les α des M, intervertissons α et ω dans les Γ et changeons le signe de ce déterminant.

On définit ainsi des M^j_k à dériver par la formule

$$\frac{D}{Dx_i} M^j_k = \frac{\partial}{\partial x_i} M^j_k - \Gamma^\alpha_{ik} M^j_\alpha + \Gamma^j_{i\alpha} M^\alpha_k . \qquad (27)$$

Celle-ci est finalement construite de telle manière que

$$N^k_j \frac{D}{Dx_i} M^j_k + M^j_k \frac{D}{Dx_i} N^k_j = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(N^k_j M^j_k \right) .$$

Donc les dérivées en D, (25), (26), (27) sont des dérivées partielles généralisées possédant déjà au moins deux propriétés essentielles (*Cf.* paragraphe II):

1° *On n'altère pas la seconde formule stokienne si, dans* Δ_2, *on remplace les* ∂ *par des* D;

2° *Les dérivées partielles de* $N^{jk} M_{jk}$ *et de* $N^k_j M^j_k$ *s'expriment en* D *comme en* ∂.

Remarquons aussi que les formules (25), (26), (27), comme d'ailleurs (8) et (10), sont indépendantes de considérations métriques ou mieux qu'elles tendent à engendrer ces considérations plutôt qu'à en naître. En effet, nos M à deux indices conduisent maintenant à des M_{ii} qui ne sont plus nuls si bien que, de la forme *bilinéaire* écrite en (4), naît une forme *quadratique.* Les coefficients de celle-ci, avec des notations analogues à celles du paragraphe III, pourraient s'appeler des M_{ij}^{**}. Pour nous conformer aux habitudes, nous les appellerons des g_{ij} et la forme quadratique maintenant apparue sera

$$ds^2 = g_{ij}\, dx_i\, dx_j \, . \tag{28}$$

C'est d'elle que procèdent la géométrie métrique et la gravitation.

Enfin des généralisations peuvent s'apercevoir. Ainsi dans l'expression à trois déterminants du début de ce paragraphe, *les fonctions* Γ *n'ont pas besoin d'être les mêmes dans les deux derniers déterminants.* Il est fort intéressant de rechercher ce qui peut se conserver des résultats subséquents quand ces Γ diffèrent. Mais c'est encore une chose qui sortirait des limites de cet exposé pédagogique (*Cf. Annales de Toulouse*, 3e Mémoire).

Remarquons encore que la théorie des dérivations en D n'est qu'un prolongement de celle des déterminants.

VII. — Symboles a quatre indices.

Jusqu'ici la dérivation en D semble avoir été instituée pour conserver des formules en ∂. Elle ne peut cependant les conserver toutes, sous peine de ne pas être une véritable généralisation. Parmi les choses qu'elle ne conserve pas, il faut signaler, en tout premier lieu, l'*interversion des dérivations.*

Ainsi traitant les dérivées en D, (8) et (10), comme les expressions à deux indices du paragraphe précédent, il vient, après des calculs simples et quelques permutations d'indices,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_i} & \dfrac{D}{Dx_j} \\[2ex] \dfrac{DP_k}{Dx_i} & \dfrac{DP_k}{Dx_j} \end{vmatrix} = P_\alpha B^\alpha_{kji} \, , \tag{29}$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{D}{Dx_i} & \dfrac{D}{Dx_j} \\[2ex] \dfrac{DP^k}{Dx_i} & \dfrac{DP^k}{Dx_j} \end{vmatrix} = P^\alpha B^k_{\alpha ij} \, , \tag{30}$$

$$B^\alpha_{kji} = \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^\alpha_{ki} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^\alpha_{kj} + \Gamma^\beta_{ik}\Gamma^\alpha_{\beta j} - \Gamma^\beta_{jk}\Gamma^\alpha_{\beta i} \, . \tag{31}$$