Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 23 (1923)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA PÉDAGOGIE DES THÉORIES D'EINSTEIN

Autor: Buhl, A.

Kapitel: V. — Optique. — Relativité restreinte.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19743

Enfin, la seconde équation (18) donne

$$\operatorname{div}\left(\nabla\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\right) = \rho ,$$

d'où, d'après la relation supplémentaire, *l'équation scalaire*

$$-\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \rho . \qquad (21)$$

On voit que l'étude des équations (18) est ramenée à celle de (19), (20), (21).

Bien entendu

$$-\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

mais, même si l'on ne connaissait pas cette signification de ∇^2, on la retrouverait aisément en suivant le fil du calcul. Il en est de même pour toutes les notations vectorielles du présent paragraphe.

V. — Optique. — Rélativité restreinte.

Soit $\rho = 0$. Les équations de Maxwell-Lorentz se simplifient. Le vecteur $\mathbf{v}$, qui correspond à la conductibilité électrique proprement dite, disparaît. Il ne reste, dans les seconds membres de (16), que le fameux courant de déplacement suffisant pour bâtir l'optique. Alors les équations (16) et (17) sont vérifiées par

$$\mathbf{d}_y = \mathbf{h}_z = a \cos n\left(t - \frac{x}{c}\right) ,$$

tous les autres $\mathbf{d}$ et $\mathbf{h}$ étant nuls. Cette solution élémentaire pourrait servir à en construire bien d'autres, à cause du caractère linéaire des équations; toutes ces solutions présenteraient une même propriété: celle de ne changer en rien quant t augmente de T et x de cT. Nous sommes donc en présence d'un phénomène de nature périodique qui se propage avec la vitesse c. C'est l'onde électromagnétique, c'est la lumière.

Les équations (20) et (21) rentrent dans la forme unique

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 . \qquad (22)$$

Nous n'aurons plus alors, dans la théorie, que des fonctions U satisfaisant à cette équation.

Ecrivons la

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial l^2} = 0 .$$

Remarquons que

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial l^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial l'^2}$$

si

$$\left\{ \begin{aligned} x' &= \quad x \cos\theta + l \sin\theta , \\ l' &= - x \sin\theta + l \cos\theta , \end{aligned} \right. \tag{23}$$

En posant

$$\operatorname{tang}\theta = i\frac{v}{c} , \qquad l = ict , \qquad l' = ict' ,$$

on conclut définitivement que l'équation (22) et, par suite, toutes ses solutions U sont conservées par la transformation

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} , \qquad y' = y , \qquad z' = z , \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

C'est la *transformation de Lorentz*; elle équivaut, de par (23), à une *rotation imaginaire* et, comme toute rotation, engendre un *groupe*. On aurait pu l'étudier directement sur les équations de Maxwell-Lorentz (pour $\rho = 0$) sans passer par l'équation (22) mais comme cette dernière est l'équation fondamentale de la théorie ondulatoire il est hautement préférable, dans un exposé pédagogique, de ne pas se priver de montrer que la théorie ondulatoire de la lumière est aussi un cas particulier des généralités ici invoquées.

Il n'entre point dans le plan de cet article de discuter longuement les conséquences de la transformation de Lorentz; on ne l'a fait que trop souvent et en embrouillant les choses les plus simples.

Ainsi, pour la *contraction de Lorentz*, il suffit de remarquer que si l'éloignement de deux observateurs varie avec une certaine vitesse (ici v), ils se voient *réciproquement* diminués en dimension aussi bien du fait de la vitesse que du fait de l'éloignement.

Pour l'éloignement tout le monde admet cela; en quoi est-ce plus étrange pour la vitesse ? Rien de plus suggestif que cet exact rapprochement entre la perspective ordinaire et la cinématique lorentzienne.

VI. — Dérivées en D d'expressions a deux indices.

Revenons maintenant à la seconde formule stokienne (3) et plus particulièrement à son déterminant Δ_2 qui nous a déjà donné le champ électromagnétique général. Il s'agit de lui faire donner les formules de gravitation proprement dites.

Considérons, dans Δ_2, les mineurs des termes de la première ligne. On ne les altère pas en les écrivant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} & \frac{\partial}{\partial x_j} & \frac{\partial}{\partial x_k} \\ M_{i\omega} & M_{j\omega} & M_{k\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^{\alpha}_{i\omega} & \Gamma^{\alpha}_{j\omega} & \Gamma^{\alpha}_{k\omega} \\ M_{i\alpha} & M_{j\alpha} & M_{k\alpha} \\ i & j & k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \Gamma^{\alpha}_{i\omega} & \Gamma^{\alpha}_{j\omega} & \Gamma^{\alpha}_{k\omega} \\ i & j & k \\ M_{\alpha i} & M_{\alpha j} & M_{\alpha k} \end{vmatrix}$$

car les deux derniers déterminants sont identiquement nuls. Bien entendu on a toujours l'hypothèse (7) et les i, j, k libres viennent, dans les développements, prendre la place des ω. Remarquons aussi tout de suite, que les présents raisonnements ne supposent plus aucune relation entre M_{ij} et M_{ji}.

Convenons maintenant que l'expression précédente, à trois déterminants, s'écrive

$$\begin{vmatrix} \frac{D}{Dx_i} & \frac{D}{Dx_j} & \frac{D}{Dx_k} \\ M_{i\omega} & M_{j\omega} & M_{k\omega} \\ i & j & k \end{vmatrix}. \tag{24}$$

La simple identification donne des formules rentrant toutes dans le type

$$\frac{D}{Dx_i} M_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_i} M_{jk} - \Gamma^{\alpha}_{ik} M_{j\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{ij} M_{\alpha k}. \tag{25}$$

On peut ensuite étendre les raisonnements du paragraphe II. Dans (24) et dans l'expression qui précède (24) relevons partout les