Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 23 (1923)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA PÉDAGOGIE DES THÉORIES D'EINSTEIN
Autor: Buhl, A.
Kapitel: IV. — Champ de Maxwell-Lorentz.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19743

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

lerons des M^*_{ij}, pour lesquels

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x_2} M^*_{34} + \dfrac{\partial}{\partial x_3} M^*_{42} + \dfrac{\partial}{\partial x_4} M^*_{23} = 0 , \\ \dfrac{\partial}{\partial x_3} M^*_{41} + \dfrac{\partial}{\partial x_4} M^*_{13} + \dfrac{\partial}{\partial x_1} M^*_{34} = 0 , \\ \dfrac{\partial}{\partial x_4} M^*_{12} + \dfrac{\partial}{\partial x_1} M^*_{24} + \dfrac{\partial}{\partial x_2} M^*_{41} = 0 , \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} M^*_{23} + \dfrac{\partial}{\partial x_2} M^*_{31} + \dfrac{\partial}{\partial x_3} M^*_{12} = 0 . \end{array}\right. \qquad (15)$$

Ces M^*_{ij} existent évidemment; ils sont de la forme

$$M^*_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} ,$$

les Φ_i étant dits *potentiels électromagnétiques.*

Les équations (15) constituent *le second groupe des équations de Maxwell-Lorentz généralisées.* Elles expriment que $M^*_{ij}\,dx_i\,dx_j$ est une différentielle *exacte* dans E_4.

IV. — Champ de Maxwell-Lorentz.

Imaginons que l'on réduise la généralité précédente en posant

$$\begin{array}{llll} M_{12} = \mathbf{d}_z , & M_{14} = -c\,\mathbf{h}_x ; & M^*_{12} = \mathbf{h}_z , & M^*_{14} = c\,\mathbf{d}_x , \\ M_{23} = \mathbf{d}_x , & M_{24} = -c\,\mathbf{h}_y ; & M^*_{23} = \mathbf{h}_x , & M^*_{24} = c\,\mathbf{d}_y , \\ M_{31} = \mathbf{d}_y , & M_{34} = -c\,\mathbf{h}_z ; & M^*_{31} = \mathbf{h}_y , & M^*_{34} = c\,\mathbf{d}_z . \end{array}$$

Alors, en écrivant x, y, z, t pour x_1, x_2, x_3, x_4, et c étant une constante, les équations (14) deviennent

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial z} = \dfrac{1}{c}\left(\rho \mathbf{V}_x + \dfrac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial t}\right) , \\ \dfrac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial x} = \dfrac{1}{c}\left(\rho \mathbf{V}_y + \dfrac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial t}\right) , \\ \dfrac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial y} = \dfrac{1}{c}\left(\rho \mathbf{V}_z + \dfrac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial t}\right) , \\ \dfrac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial z} = \rho . \end{array}\right. \qquad (16)$$

De même les équations (15) deviennent

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial z} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial t}\,, \\ \dfrac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial z} - \dfrac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial x} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial t}\,, \\ \dfrac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial y} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial t}\,, \\ \dfrac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial z} = 0\,. \end{array}\right. \tag{17}$$

Bien que la notation vectorielle n'ait rien d'indispensable, elle intervient ici commodément pour rassembler les systèmes (16) et (17) sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{rot}\mathbf{h} = \mathbf{s} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{d}}{\partial t}\,, \qquad \operatorname{div}\mathbf{d} = \rho\,, \qquad \mathbf{s} = \dfrac{\rho}{c}\mathbf{v}\,, \\ \operatorname{rot}\mathbf{d} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}\,, \qquad \operatorname{div}\mathbf{h} = 0\,. \end{array}\right. \tag{18}$$

Telles sont les équations de Maxwell-Lorentz qui, à vrai dire, sont aussi bien celles de Faraday-Ampère.

Des deux dernières on conclut $\mathbf{h} = -\operatorname{rot}\mathbf{f}$ et

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{d} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\right) = 0\,, \qquad \mathbf{d} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \nabla\varphi\,,$$

si ∇ désigne l'opération $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ qui s'applique à une quantité $\varphi(x, y, z, t)$ scalaire.

Portant dans la première équation (18), on a

$$-\operatorname{rot}^2\mathbf{f} = -\nabla^2\mathbf{f} - \nabla\operatorname{div}\mathbf{f} = \mathbf{s} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial t^2} + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,.$$

Avec la *relation supplémentaire de Maxwell*

$$\operatorname{div}\mathbf{f} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0\,, \tag{19}$$

il reste *l'équation vectorielle*

$$-\nabla^2\mathbf{f} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial t} = \mathbf{s}\,. \tag{20}$$

Enfin, la seconde équation (18) donne

$$\operatorname{div}\left(\nabla\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\right) = \rho \ ,$$

d'où, d'après la relation supplémentaire, *l'équation scalaire*

$$-\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \rho \ . \tag{21}$$

On voit que l'étude des équations (18) est ramenée à celle de (19), (20), (21).

Bien entendu

$$-\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

mais, même si l'on ne connaissait pas cette signification de ∇^2, on la retrouverait aisément en suivant le fil du calcul. Il en est de même pour toutes les notations vectorielles du présent paragraphe.

V. — Optique. — Relativité restreinte.

Soit $\rho = 0$. Les équations de Maxwell-Lorentz se simplifient. Le vecteur $\mathbf{v}$, qui correspond à la conductibilité électrique proprement dite, disparaît. Il ne reste, dans les seconds membres de (16), que le fameux courant de déplacement suffisant pour bâtir l'optique. Alors les équations (16) et (17) sont vérifiées par

$$\mathbf{d}_y = \mathbf{h}_z = a\cos n\left(t - \frac{x}{c}\right) ,$$

tous les autres $\mathbf{d}$ et $\mathbf{h}$ étant nuls. Cette solution élémentaire pourrait servir à en construire bien d'autres, à cause du caractère linéaire des équations; toutes ces solutions présenteraient une même propriété: celle de ne changer en rien quant t augmente de T et x de cT. Nous sommes donc en présence d'un phénomène de nature périodique qui se propage avec la vitesse c. C'est l'onde électromagnétique, c'est la lumière.

Les équations (20) et (21) rentrent dans la forme unique

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \ . \tag{22}$$