Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 23 (1923)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: MÉTHODES D'APPROXIMATION DANS LE CALCUL DU NOMBRE DES POINTS A COORDONNÉES ENTIÈRES

Autor: van der Corput, J. G.

Kapitel: 5. — La méthode de Pfeiffer.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19730

puisque la partie entière de $\frac{k + c - E(c)}{B}$ est égale à 0. On a donc

$$\sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{Ah + c}{B}\right) = \sum_{k=0}^{B-1} \left(\frac{k + c - E(c)}{B} - \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{B - 1}{2} + c - E(c) - \frac{B}{2} = c - E(c) - \frac{1}{2} ,$$

ce qui est en valeur absolue inférieur à 1. Il s'ensuit donc de (5)

$$\left| \sum_{h=0}^{B-1} \psi\left(\frac{x}{t + h}\right) \right| < 4g + 3 .$$

C'est sur cette inégalité que repose la méthode de Piltz. Pour une valeur donnée de t on peut choisir A et B tels que le membre de droite de cette dernière inégalité est beaucoup plus petit que B, donc aussi beaucoup plus petit que la longueur de l'intervalle.

M. Piltz n'a jamais publié sa méthode. En 1901 il a écrit deux lettres à M. Landau, pour exposer son procédé et pour démontrer le théorème de Voronoï. Les démonstrations données dans ces lettres, ne sont pas exactes, et ce n'est que depuis quelques années que M. Landau [1] a réussi à en déduire l'approximation de Voronoï. Jusqu'à présent on n'a pu trouver aucun résultat meilleur avec cette méthode, quoique M. Piltz prétendît qu'il pouvait diminuer l'erreur, et la ramener à $O\left(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right)$, quelque soit le nombre positif ε.

5. — *La méthode de Pfeiffer.*

Le sort de la méthode de Piltz ressemble un peu à celui de la troisième méthode que nous allons exposer, celle de Pfeiffer [2]. L'inventeur a, il est vrai, publié sa méthode (1886); mais son travail manquait tellement de clarté et de précision qu'il est resté sans influence sur le développement de la théorie analytique des nombres, jusqu'à ce que M. Landau [3] en 1912 eût trouvé

[1] *Gött. Nachr.* (1920), p. 13-32.

[2] *Jahresbericht der Pfeifferschen Lehr- und Erziehungs-Anstalt zu Jena* (1886).

[3] *Wien. Ber.* (IIa), 121 (1912), p. 2195-2332 ; 124 (1915), p. 469-505.

l'erreur dans la démonstration et l'eût remise en ordre. Cette méthode est basée sur l'étude des séries de Fourier. On considère l'intégrale

$$\Phi_m = \iint\limits_D \varphi_m(u)\,\varphi_m(v)\,du\,dv\;,$$

où l'on a posé

$$\varphi_m(u) = 1 + 2\sum_{h=1}^{m} \cos 2h\pi u\;,$$

et où le domaine D satisfait à des conditions très générales. L'idée fondamentale de la méthode est que, pour m croissant indéfiniment, Φ_m tend vers le nombre des points entiers du domaine D, à condition que les points entiers, situés sur le contour de D, soient comptés d'une façon déterminée; par exemple, si le contour du domaine a une tangente en un point entier, on ne comptera ce point qu'à demi.

Avec la méthode de Pfeiffer, M. Landau démontre les résultats de Voronoï et de Sierpiński, donc (3) et (4) [1]. Dans le problème du cercle il en déduit non seulement une relation contenant le symbole O de Landau, mais encore une relation contenant le symbole Ω de Hardy-Littlewood. Il montre en effet que pour chaque nombre ε positif

$$\mathrm{P}(x) = \Omega\left(x^{\frac{1}{4}-\varepsilon}\right)\;{}^{2},$$

c'est-à-dire que pour x croissant indéfiniment le quotient

$$\frac{\mathrm{P}(x)}{x^{\frac{1}{4}-\varepsilon}}$$

ne tend pas vers 0.

Si β ne dépend pas de x, la relation

$$\mathrm{P}(x) = \mathrm{O}\left(x^{\beta}\right)$$

est valable pour $\beta \geqq \frac{1}{3}$, d'après (4), mais fausse pour $\beta < \frac{1}{4}$.

---

[1] *Annali di Mat.* (Tortolini), Rome (3) 20 (1913), p. 1-28; *Gött. Nachr.* (1915), p. 148-160.
[2] *Wien. Ber.* (IIa) 124 (1915), p. 469-505.

En effet, si la relation était juste pour $\beta < \frac{1}{4}$, on pourrait choisir le nombre positif ε de telle façon que $\beta < \frac{1}{4} - \varepsilon$, et alors $\frac{P(x)}{x^{\frac{1}{4}-\varepsilon}}$ tendrait vers 0 pour x croissant indéfiniment. La limite inférieure de l'exposant β est donc contenue dans l'intervalle $\frac{1}{4} \leqq \rho \leqq \frac{1}{3}$. La détermination exacte de la limite inférieure est un des problèmes les plus intéressants de la théorie des nombres, mais on n'y est jusqu'ici pas encore arrivé.

M. Landau [1] applique aussi cette méthode à d'autres problèmes; entre autres il en déduit les approximations analogues pour une ellipse. D'autres applications ont été données par Cauer [2], Hammerstein [3] et moi-même [4].

Comme le fondement de la méthode de Pfeiffer est une identité, on ne doit pas s'étonner de pouvoir en déduire non seulement des approximations, mais aussi des identités. Par exemple, si x est un nombre positif, non entier, on trouve [5]

$$P(x) = \sqrt{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(n)}{\sqrt{n}} J_1(2\pi\sqrt{nx}) \tag{6}$$

et [6]

$$\Delta(x) = \frac{1}{4} + \sqrt{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{\sqrt{n}} L(2\pi\sqrt{nx}) \ , \tag{7}$$

où $r(n)$ désigne le nombre des solutions entières de $u^2 + \rho^2 = n$, et l'on a

$$L(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos xu \sin \frac{x}{u} \, du = Y_1(2x) - H_1(2x) \ ;$$

$J_1(x)$ est la première fonction de Bessel de premier ordre, $Y_1(x)$ est la deuxième solution habituelle de l'équation différentielle

[1] *Wien. Ber.* (IIa) 124 (1915), p. 469-505.
[2] Thèse de doctorat (1914), Gœttingue.
[3] Thèse de doctorat (1919), Gœttingue.
[4] *Nieuw Archief* (2) 13 (1920), p. 125-140.
[5] LANDAU. *Gött. Nachr.* (1920), p. 109-134.
[6] ROGOSINSKI. Thèse de doctorat (1922), Gœttingue.

de Bessel avec 1 comme paramètre, et $H_1(x)$ est la fonction cylindrique

$$H_1(x) = \frac{2}{\pi} \int_1^x \frac{te^{-xt}}{\sqrt{t^2-1}}\, dt\ .$$

Si x est entier, on doit remplacer dans (6) et (7) $P(x)$ par $P(x) - \frac{1}{2} r(x)$, et $\Delta(x)$ par $\Delta(x) - \frac{1}{2} d(x)$.

Des relations (6) et (7), qui ont été découvertes par Voronoï [1] et Hardy [2], on déduit facilement les relations déjà mentionnées plusieurs fois de Voronoï et de Sierpiński [3].

Comme je l'ai déjà fait remarquer, l'ordre de grandeur exact de $P(x)$ n'est pas connu, d'ailleurs l'ordre de $\Delta(x)$ ne l'est pas non plus. Par contre l'ordre exact des valeurs moyennes des fonctions $(\Delta(t))^2$ et $(P(t))^2$ dans l'intervalle $1 \leq t \leq x$ est connu. En effet comme M. Cramér [4] l'a déduit de (6) et (7) (il s'est servi même de deux relations plus simples), on a pour chaque nombre positif ε

$$\int_1^x (\Delta(t))^2\, dt = \gamma_1 x^{\frac{3}{2}} + O\left(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon}\right)$$

et

$$\int_1^x (P(t))^2\, dt = \gamma_2 x^{\frac{3}{2}} + O\left(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon}\right),$$

où γ_1 et γ_2 désignent des nombres positifs constants. La valeur moyenne des carrés des fonctions $\Delta(x)$ et $P(x)$ a donc le même ordre que la fonction $\sqrt{x}$, de sorte que $\frac{\Delta(x)}{\sqrt[4]{x}}$ et $\frac{P(x)}{\sqrt[4]{x}}$ ne tendent pas vers zéro pour x croissant indéfiniment. Nous pouvons donc écrire

$$\Delta(x) = \Omega\left(\sqrt[4]{x}\right) \quad \text{et} \quad P(x) = \Omega\left(\sqrt[4]{x}\right).$$

---

[1] *Ann. de l'Ec. Norm.* (3) 21 (1904), p. 207-268 et p. 459-534; *Verh. III. intern. Math. Kongresses in Heidelberg* (1904), p. 241-245. Cf. HARDY, *Lond. M. S. Proc.* (2) 15 (1916), p. 1-25 et SIERPIŃSKI, *Pracc mat.-fiz.*, 18, p. 1-59.

[2] *Quart. J.*, 46 (1915), p. 263-283.

[3] LANDAU, *Gött. Nachr.* (1915), p. 161-171; *Münch. Ber.* (1915), p. 317-328; *Math. Zs.* 5 (1919), p. 319-320.

[4] *Math. Zs.* 15 (1922), p. 201-210.

Si l'on emploie l'inégalité connue de Schwarz

$$\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)^2 \leqq (b-a)\int_a^b f^2(t)\,dt\ ,$$

où l'on suppose $b \geqq a$, on trouve que la valeur moyenne des fonctions $|\Delta(x)|$ et $|\mathrm{P}(x)|$ est au plus du même ordre que $\sqrt[4]{x}$.

6. — *La méthode de Landau.*

La méthode basée sur l'étude des fonctions de variables complexes s'appuie sur le lien qui existe entre le nombre des points entiers de certains domaines et la convergence de certaines séries de Dirichlet. Nous n'avons à considérer ici que les séries de Dirichlet ordinaires, c'est-à-dire celles du type

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}\ ,$$

les a_n étant des coefficients constants et s une variable complexe.

Si cette série converge en un point s_0, elle converge en chaque point s ayant une partie réelle plus grande. Pour le démontrer, posons

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{a_n}{n^{s_0}} = \mathrm{F}_k\ , \qquad \mathrm{F}_0 = 0\ ,$$

donc

$$\frac{a_n}{n^{s_0}} = \mathrm{F}_n - \mathrm{F}_{n-1} \qquad (n \geqq 1)\ .$$

Si v et w sont des nombres entiers ($w > v \geqq 1$), on a

$$\sum_{n=v}^{w} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=v}^{w} \frac{\mathrm{F}_n - \mathrm{F}_{n-1}}{n^{s-s_0}} = \sum_{n=v}^{w} \frac{\mathrm{F}_n}{n^{s-s_0}} - \sum_{n=v-1}^{w-1} \frac{\mathrm{F}_n}{(n+1)^{s-s_0}}\ ,$$

donc

$$\sum_{n=v}^{w} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{n=v}^{w-1} \mathrm{F}_n\left(\frac{1}{n^{s-s_0}} - \frac{1}{(n+1)^{s-s_0}}\right) + \frac{\mathrm{F}_w}{w^{s-s_0}} - \frac{\mathrm{F}_{v-1}}{v^{s-s_0}}\ . \qquad (8)$$