

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 22 (1921-1922)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA CRISTALLOGRAPHIE
Autor: Winants, Marcel
Kapitel: Chapitre premier. Etude détaillée d'une surface tétraédrique.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-515727>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 01.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur une surface donnée, on considère des points et des lignes remarquables. Citons les ombilics, les points paraboliques, les points singuliers, les lignes de courbure, les lignes de courbure totale constante, les géodésiques. Ces lignes et ces points ne sont pas distribués d'une façon quelconque.

Nous nous proposons d'appliquer la symétrie cristallographique à l'étude de certaines surfaces. Cette symétrie nous donnera d'utiles renseignements sur la répartition des propriétés géométriques.

Nous poursuivons un double but:

1^o montrer les avantages qui peuvent résulter de cette méthode pour la description d'une surface particulière;

2^o faire voir que cette méthode pourrait servir de base à une classification rationnelle des surfaces.

Nous nous adressons à la fois à des géomètres et à des cristallographes. Nous rappellerons le plus brièvement possible les définitions fondamentales de la géométrie et de la cristallographie.

Dans le premier chapitre nous ferons une étude détaillée d'une surface du troisième ordre; dans le chapitre II nous ferons une étude succincte de deux surfaces du quatrième ordre.

Dans ces deux premiers chapitres, nous aurons eu l'occasion de rencontrer plusieurs principes généraux que nous résumerons et que nous généraliserons dans le chapitre III.

L'application de ces principes nous permettra d'aborder quelques courbes et surfaces plus compliquées. Ce sera l'objet du chapitre IV.

Enfin, dans un cinquième et dernier chapitre, nous esquisserons une classification des surfaces au point de vue de la symétrie.

CHAPITRE PREMIER.

Etude détaillée d'une surface tétraédrique.

§ 1. — Etude sommaire de quelques cubiques planes.

1. — Nous ferons précéder l'étude de chaque surface de celle des principales courbes que l'on peut obtenir en la coupant par des plans.

Dans la description des courbes algébriques planes du troisième ordre, nous adopterons la classification de ces courbes en cinq grandes familles :

Cubiques	non singulières	(VI)	bipartites	1 ^o
			unipartites	2 ^o
	unicursales . .	(IV)	nodales { acnodales	3 ^o
			{ crunodales	4 ^o
			cuspidales (III)	5 ^o

Les cubiques non singulières sont de la VI^e classe; les cubiques nodales de la IV^e; et les cubiques cuspidales de la III^e.

Les cubiques non singulières sont du premier genre, et les cubiques unicursales du genre zéro.

Nous subdiviserons chaque famille en quatre groupes. Une cubique peut rencontrer la droite de l'infini en :

- trois points réels et distincts;
- un point réel et deux points imaginaires;
- un point simple et deux points coïncidents;
- trois points coïncidents.

Les courbes algébriques planes du troisième ordre se trouvent ainsi distribuées en vingt grandes espèces. Par exemple, le folium de Descartes $[x^3 - 3axy + y^3 = 0]$ est une cubique $[4^o, b]$; la cissoïde de Dioclès $[x(x^2 + y^2) = ay^2]$, une cubique $[5^o, b]$; la courbe $xy(x + y) = a^2(x - y)$, une cubique $[1^o, a]$; enfin la parabole semi-cubique $(my^2 = x^3)$ est une courbe $[5^o, d]$.

Chaque espèce se divise encore en plusieurs variétés ou sous-variétés. Mais les vingt espèces nous suffiront pour ce qui va suivre.

2. — Commençons par étudier le lieu géométrique des points dont les distances aux trois côtés d'un triangle équilatéral ont un produit constant.

Nous prendrons ce triangle comme triangle fondamental, et nous emploierons les coordonnées trilineaires absolues.

L'équation du lieu pourra s'écrire :

$$\alpha \beta \gamma = m^3 .$$

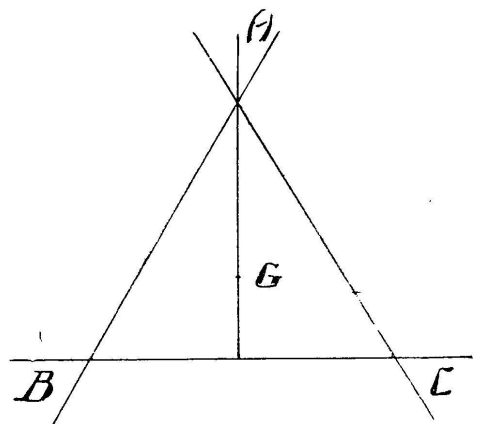


Fig. 1.

La courbe est une cubique ne rencontrant aucun côté du triangle à distance finie.

Si la cubique passe par le point: $\alpha = a, \beta = b, \gamma = c$, elle passe également par le point: $\alpha = b, \beta = c, \gamma = a$, et par le point: $\alpha = c, \beta = a, \gamma = b$. On ne doit pas perdre de vue que l'on a:

$$\alpha + \beta + \gamma = h = \text{hauteur}.$$

Si donc on fait tourner la cubique d'un angle de 120° autour d'une droite passant par le centre de gravité du triangle fondamental, et perpendiculaire à son plan, la courbe viendra prendre une position d'apparence identique à sa position première. Nous dirons que la cubique possède un axe ternaire normal à son plan.

En cristallographie, on appelle axe d'ordre n , et l'on représente par Λ^n une droite qui jouit de la propriété suivante: quand on fait tourner une certaine figure autour de cette droite, de la n^{e} partie d'un tour, elle vient occuper une position nouvelle, complètement indiscernable de la position primitive. La figure est alors dite restituée.

Les trois hauteurs du triangle de référence sont des Λ^2 , c'est-à-dire des axes de symétrie ordinaire. Si la courbe passe par le point (a, b, c) , elle passe par le point (a, c, b) . Une rotation de 180° autour d'une hauteur amène donc la restitution.

La courbe que nous étudions, admet alors quatre axes de symétrie: $\Lambda^3, 3\Lambda^2$.

3. — Cette cubique ne peut avoir aucun point d'inflexion.

D'abord un pareil point ne peut se trouver en G, car l'axe ternaire exigerait la présence d'au moins trois tangentes inflexionnelles (trois ou bien un multiple de trois), ce qui ne peut pas être.

La courbe ne peut pas avoir d'inflexion, en dehors du point G, car les quatre axes entraîneraient deux ou cinq autres inflexions, suivant que la première appartiendrait ou non à l'une des hauteurs du triangle ABC. Toutes ces inflexions se trouveraient sur une même circonférence de centre G.

Mais une courbe algébrique plane du troisième ordre n'admet jamais plus de trois inflexions réelles, et, quand elle en admet trois, elles sont collinéaires. Or l'existence d'une droite d'inflexions n'est pas compatible avec la symétrie autour du Λ^3 .

4. — La courbe n'a certainement pas de centre, car le centre d'une courbe d'ordre impair est toujours une inflexion.

Des raisonnements analogues prouvent que la cubique ne peut avoir de nœud ni de rebroussement. On se rappellera qu'une courbe non dégénérée du troisième ordre ne peut avoir qu'un seul point double.

5. — Des deux numéros qui précèdent, on peut conclure à la proposition suivante:

THÉORÈME: *Quand une courbe algébrique plane du troisième ordre, non dégénérée, possède un axe de symétrie ternaire, normal à son plan, elle n'admet ni inflexion, ni centre, ni nœud, ni rebroussement.*

6. — D'après ce que nous avons rappelé plus haut (1), toute cubique rencontre la droite de l'infini en trois points dont, au moins, un réel. Ce point réel, à l'infini, est le sommet d'un faisceau de cordes parallèles, asymptotiques à la courbe. Il détermine donc une direction asymptotique.

La symétrie ternaire associe, à cette direction, deux autres directions asymptotiques. Toute cubique à Λ^3 appartient donc au groupe a (1).

La courbe ne rencontre aucune de ses trois asymptotes. Car, si elle en rencontrait une, elle devrait les rencontrer toutes les trois, en vertu de la symétrie ternaire. Mais on sait que les trois intersections d'une cubique avec ses asymptotes, sont collinéaires. La droite, qu'elles déterminent, s'appelle la *satellite* de la droite de l'infini. La symétrie exigerait que cette dernière eût trois satellites, ce qui est absurde. Donc:

7. — THÉORÈME: *Quand une courbe algébrique plane du troisième ordre, non dégénérée, possède un axe de symétrie ternaire, normal à son plan, elle admet toujours trois asymptotes, et n'en rencontre aucune.*

8. — La cubique $\alpha\beta\gamma = m^3$, que nous avons définie plus haut (2), ne rencontre aucun côté du triangle fondamental, à distance finie. Par conséquent, elle les rencontre tous trois à distance infinie. Elle admet donc ces trois côtés comme asymptotes.

9. — Le triangle fondamental ABC (2) partage le plan en sept régions. L'une de ces régions est intérieure au triangle; trois autres sont adjacentes à des côtés; et trois autres opposées à des angles.

Si la constante m est négative, la courbe ne pénètre pas à l'intérieur du triangle; elle se compose de trois branches, situées dans les régions adjacentes aux côtés. Elle est donc unipartite [2°, a].

Si la constante m est positive, la courbe comprend toujours trois branches, situées dans les régions opposées aux angles. Mais il peut y avoir un ovale intérieur au triangle. Suivant les valeurs positives de m , la courbe sera donc unipartite ou bipartite.

Comme transition, nous aurons une courbe unicursale, nécessairement acnodale (4).

Nous nous proposons d'étudier séparément chacun de ces cas.

10. — Voyons d'abord comment la cubique rencontre les médianes du triangle de référence. Entre les trois coordonnées trilineaires absolues d'un point quelconque, on a la relation fondamentale.:

$$\alpha + \beta + \gamma = h ;$$

h désigne une hauteur-médiane (2).

Nous devons résoudre les trois équations suivantes, considérées comme simultanées:

$$\alpha\beta\gamma = m^3, \quad \alpha + \beta + \gamma = h, \quad \beta = \gamma.$$

En vertu de la troisième, les deux autres peuvent s'écrire:

$$\alpha\beta^2 = m^3, \quad \alpha + 2\beta = h.$$

L'avant-dernière montre que α et m ont toujours le même signe. Eliminons α ; il vient:

$$m^3 = \beta^2(h - 2\beta) = h\beta^2 - 2\beta^3;$$

si nous divisons par $m^3\beta^3$, nous obtiendrons:

$$\frac{1}{\beta^3} - \frac{h}{m^3} \frac{1}{\beta} + \frac{2}{m^3} = 0.$$

Le discriminant de cette équation cubique est:

$$\delta = \frac{1}{m^6} - \frac{1}{27} \frac{h^3}{m^9} = \frac{1}{27m^9} (27m^3 - h^3).$$

Il en résulte immédiatement le tableau suivant:

$m < 0$ cubique unipartite non singulière [2°, a];

- $m = 0$ cubique dégénérée en trois droites ;
 $0 < m < \frac{h}{3}$ cubique bipartite [1° , a] ;
 $m = \frac{h}{3}$ cubique acnodale [3° , a] ;
 $m > \frac{h}{3}$ cubique unipartite non singulière [2° , a].

11. — *Cubique acnodale.* Le point double isolé ne peut être que G, en vertu de la symétrie. La courbe est unicursale. Nous allons chercher son intersection mobile avec une droite variable passant par G. Nous devons résoudre les équations :

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = \frac{h}{3}(u + v + w), \quad \alpha + \beta + \gamma = h, \quad \alpha\beta\gamma = \frac{h^3}{27}.$$

Nous avons proposé ce système, sous le n° 9214, dans le *Journal de mathématiques élémentaires* (Paris, Vuibert, 15 juillet 1920). La nature géométrique du problème suggère la solution : des deux premières équations, on tire la valeur de β et de γ en fonction de α ; on substitue dans la troisième ; on obtient une équation qui doit admettre la racine double : $\alpha = \frac{h}{3}$. On divise par :

$$(3\alpha - h)^2 = 9\alpha^2 - 6h\alpha + h^2,$$

et l'on conserve une équation linéaire, de résolution facile. On trouve ainsi :

$$\alpha = -\frac{h(v - w)^2}{3(u - v)(u - w)};$$

β et γ s'obtiennent par permutation tournante.

12. — *Cubique bipartite.* $0 < m < \frac{h}{3}$. Plus haut (10), nous avons cherché les points communs à la bissectrice $\beta = \gamma$ et à la courbe. Nous avons obtenu l'équation :

$$2\beta^3 - h\beta^2 + m^3 = 0.$$

Puisque la cubique est bipartite, cette équation a ses trois racines réelles. On applique le théorème de Descartes, et l'on trouve une racine négative, et deux positives. La bissectrice envisagée rencontre donc la courbe en trois points réels et différents, deux à l'intérieur du triangle, le troisième dans la ré-

gion A (2). On a vu (10) que les trois valeurs de α ont le signe de m .

On fera le même raisonnement pour les deux autres bissectrices. Ainsi la cubique possède un ovale, intérieur au triangle asymptotique (8). Cet ovale est très différent d'une ellipse: il admet la symétrie du triangle équilatéral, $\Lambda^3, 3\Lambda^2$.

La cubique bipartite a neuf sommets. Nous appellerons sommet tout point où la courbe est rencontrée par l'un de ses axes de symétrie.

13. — Nous proposons d'appeler *tricentre* le point où le plan d'une courbe est rencontré par un axe de symétrie ternaire.

Quand une courbe plane possède un tricentre, elle est représentable, en coordonnées trilinéaires absolues, par une équation symétrique. On doit prendre, comme figure de référence, un triangle équilatéral dont les médianes concourent au tricentre.

Nous croyons pouvoir affirmer que l'étude de la courbe sera beaucoup plus simple en coordonnées trilinéaires qu'en coordonnées cartésiennes. A propos de chaque problème particulier, la symétrie cristallographique d'une figure suggérera les coordonnées dont on doit se servir.

§ 2. — Symétrie du tétraèdre régulier.

14. — Soit ABCD un tétraèdre régulier. Ce polyèdre n'admet aucun centre. La perpendiculaire AH, abaissée d'un sommet sur la face opposée, est un axe ternaire, car, si l'on fait tourner le solide, autour de cette droite, d'un tiers de tour, il y a restitution (2). Par chaque sommet, passe un Λ^3 ; il y a donc $4\Lambda^3$.

La droite MN, qui joint les milieux de deux arêtes opposées, est un axe de symétrie binaire. Donc $3\Lambda^2$.

Les sept axes de symétrie se coupent au centre de gravité du tétraèdre.

Le plan ABM, qui contient une arête et le milieu de l'arête opposée, est un plan de symétrie. Chaque arête détermine un pareil plan P. Donc 6 P.

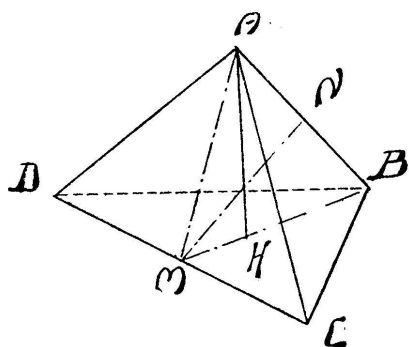


Fig. 2.

15. — On appelle *symbole de symétrie* d'un polyèdre, un tableau comprenant l'indication de tous ses éléments de symétrie.

16. — Le symbole de symétrie du tétraèdre régulier est donc :

$$4\Lambda^3, \quad 3\Lambda^2, \quad 6P.$$

§ 3. — Forme générale de la surface. — Ombilics.

17. — Nous allons étudier le lieu géométrique des points dont les distances à trois plans fixes rectangulaires ont un produit constant. C'est une surface ayant pour équation :

$$xyz = p^3.$$

Nous pouvons supposer $p > 0$, car, si p était < 0 , on changerait le sens de l'un des axes.

La surface ne rencontre ni les axes ni les plans coordonnés, à distance finie. Elle ne pénètre dans aucun des trièdres suivants : $x'yz$, $xy'z$, xyz' , $x'y'z'$, dans chacun desquels le produit des coordonnées est négatif.

On peut immédiatement trouver quatre points de la surface : $(+p, +p, +p)$; $(+p, -p, -p)$; $(-p, +p, -p)$; $(-p, -p, +p)$. Ce sont les quatre points A, B, C, D, sommets d'un tétraèdre régulier, dont le centre de gravité se trouve à l'origine des coordonnées.

La surface $xyz = p^3$ se compose donc de quatre nappes indéfinies, asymptotes aux plans coordonnés.

Son équation ne change pas quand on remplace xyz par yxz , zyx , xzy , $\overline{xy}z$, $\overline{x}\overline{y}z$, etc. La surface admet six plans de symétrie, qui sont les mêmes que ceux du tétraèdre ABCD.

On démontre, en cristallographie, que l'intersection de n plans de symétrie est un Λ^n . Il en résulte que la surface, dont nous

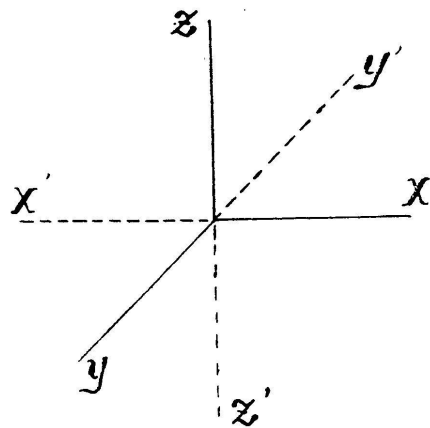


Fig. 3.

nous occupons, possède exactement la même symétrie cristallographique qu'un tétraèdre régulier. Les axes ternaires ont pour équations:

$$x = \pm y = \pm z ;$$

les doubles signes sont indépendants.

18. — Dans la suite, le tétraèdre ABCD va jouer un rôle important. On peut aisément trouver les équations de ses quatre faces:

$$BCD : x + y + z = -p ;$$

$$CDA : -x + y + z = p ;$$

$$DAB : x - y + z = p ,$$

$$ABC : x + y - z = p .$$

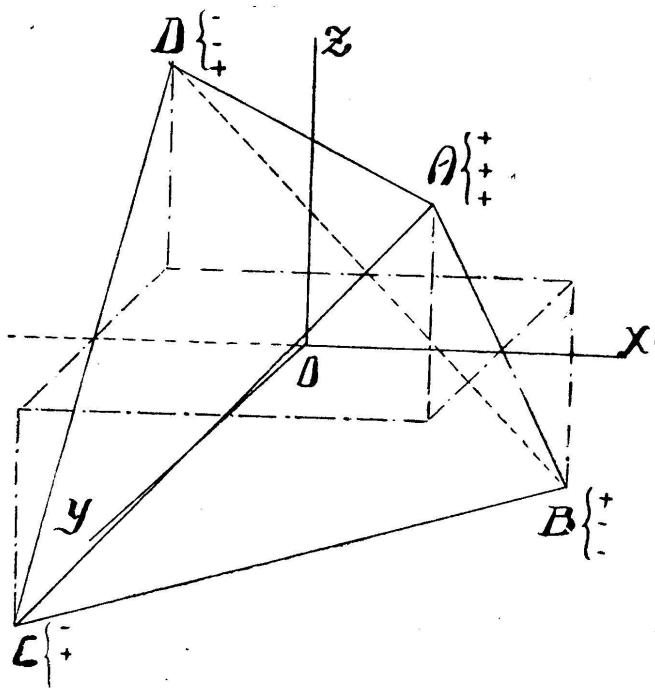


Fig. 4.

19. — Sur une surface, considérons un point ordinaire, c'est-à-dire un point pour lequel le plan tangent est parfaitement déterminé. La perpendiculaire menée au plan tangent, par le point de contact, s'appelle normale.

Par cette normale faisons passer un plan quelconque ; il va déterminer, dans la surface, une « section plane normale » laquelle possède, au point considéré, une courbure bien déterminée.

Faisons tourner le plan sécant: la courbure variera d'une manière continue. Euler a démontré que la courbure restait comprise entre un maximum et un minimum, et que les sections normales, correspondant au maximum et au minimum, étaient perpendiculaires l'une sur l'autre. Ces deux sections sont dites principales.

Depuis Monge, on appelle « ombilic » un point autour duquel la courbure est la même dans toutes les directions.

Si, en un point d'une surface, le plan tangent n'est pas bien déterminé, ce point est dit singulier. Le sommet d'un cône quelconque est toujours un point singulier.

20. — Pour la surface que nous considérons, les points A, B, C, D sont des ombilics. Il est facile de s'assurer que les

plans tangents y ont pour équations respectives :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3p ; \\ x - y - z &= 3p ; \\ -x + y - z &= 3p ; \\ -x - y + z &= 3p . \end{aligned}$$

Ces quatre points ne sont donc pas singuliers.

D'autre part, la présence d'un Λ^3 est incompatible avec l'existence de deux sections principales perpendiculaires entre elles. Ces points sont donc des ombilics.

Au polyèdre ABCD, nous donnerons le nom de tétraèdre ombilical.

21. — D'une manière plus générale, nous énoncerons la proposition suivante :

THÉOREME : *Quand une surface est rencontrée par un axe de symétrie d'ordre supérieur à deux, chaque point d'intersection est un point singulier, ou bien un ombilic.*

22. — Nous pouvons, d'ailleurs, chercher les ombilics par l'analyse. On démontre que les coordonnées d'un tel point vérifient les équations :

$$\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} .$$

Dans le cas actuel, nous avons :

$$\begin{aligned} xyz &= p^3 ; \\ z &= \frac{p^3}{xy} ; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{p^3}{x^2 y} ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{p^3}{xy^2} ; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{2p^3}{x^3 y} ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{p^3}{x^2 y^2} ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2p^3}{xy^3} . \end{aligned}$$

Les équations aux coordonnées des ombilics deviennent alors :

$$\frac{\frac{2}{x^3 y}}{1 + \frac{p^6}{x^4 y^2}} = \frac{\frac{1}{x^2 y^2}}{\frac{p^6}{x^3 y^3}} = \frac{\frac{2}{xy^3}}{1 + \frac{p^6}{x^2 y^4}} ,$$

ou bien :

$$\frac{2xy}{x^4 y^2 + p^6} = \frac{xy}{p^6} = \frac{2xy}{x^2 y^4 + p^6} .$$

On peut en déduire:

$$x^4 y^2 = x^2 y^4 = p^6, \quad (E)$$

puis:

$$x^6 y^6 = p^{12},$$

d'où:

$$xy = \pm p^2,$$

et, par conséquent:

$$z = \pm p.$$

De la première équation (E), on tire encore:

$$x^2 = y^2, \quad \text{c'est-à-dire : } x = \pm y = \pm p, \quad \text{c. q. f. d.}$$

23. — Pour mettre complètement en évidence la symétrie tétraédrique de la surface, nous allons rapporter cette dernière au tétraèdre ombilical (20) comme tétraèdre de référence.

D'un point quelconque de l'espace, nous abaisserons des perpendiculaires sur les quatre faces de ce tétraèdre; nous représenterons ces perpendiculaires par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; nous les prendrons pour coordonnées tétraédriques du point; nous choisirons les signes de telle façon qu'un point, pris à l'intérieur du tétraèdre, ait ses quatre coordonnées positives.

Les équations des quatre faces sont connues (18); les distances d'un point quelconque de l'espace à ces faces, sont:

$$\begin{aligned} \alpha &= (x + y + z + p) : \sqrt{3}, \\ \beta &= (-x + y + z - p) : (-\sqrt{3}), \\ \gamma &= (x - y + z - p) : (-\sqrt{3}), \\ \delta &= (x + y - z - p) : (-\sqrt{3}). \end{aligned}$$

De ces quatre équations, l'on déduit:

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= \alpha \sqrt{3} - p, \\ -x + y + z &= -\beta \sqrt{3} + p, \\ x - y + z &= -\gamma \sqrt{3} + p, \\ x + y - z &= -\delta \sqrt{3} + p. \end{aligned} \right\} \quad (F)$$

De la somme des trois dernières équations (F) retranchons la première; il vient:

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta) \sqrt{3} = 4p, \quad (G)$$

ce qui prouve que les quatre coordonnées tétraédriques d'un même point ne sont pas indépendantes. Du reste, il est facile de montrer, *a priori*, que leur somme est égale à la hauteur du tétraèdre de référence. La hauteur de ce tétraèdre est donc :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{4}{3}p\sqrt{3}.$$

Si, de la première équation (F), on retranche, successivement, chacune des trois autres, on obtient :

$$2x = (\alpha + \beta)\sqrt{3} - 2p,$$

$$2y = (\alpha + \gamma)\sqrt{3} - 2p,$$

$$2z = (\alpha + \delta)\sqrt{3} - 2p.$$

Si l'on tient compte de l'équation (G), on trouve :

$$\left. \begin{aligned} 4x &= (\alpha + \beta - \gamma - \delta)\sqrt{3}, \\ 4y &= (\alpha - \beta + \gamma - \delta)\sqrt{3}, \\ 4z &= (\alpha - \beta - \gamma + \delta)\sqrt{3}. \end{aligned} \right\} \quad (H)$$

24. — Si le point (x, y, z) doit appartenir à la surface que nous étudions, ses coordonnées doivent vérifier l'équation : $xyz = p^3$. En multipliant les équations (H) membre à membre, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{64p^3}{\sqrt{27}} &= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 - \alpha\beta(\alpha + \beta) - \alpha\gamma(\alpha + \gamma) \\ &\quad - \alpha\delta(\alpha + \delta) - \beta\gamma(\beta + \gamma) - \beta\delta(\beta + \delta) - \gamma\delta(\gamma + \delta) \\ &\quad + 2(\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta). \end{aligned}$$

Mais, d'après l'équation (G) du numéro précédent, on a :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{4p}{\sqrt{3}}.$$

L'équation de la surface peut donc s'écrire :

$$\Sigma\alpha^3 + 3\Sigma\alpha^2\beta + 6\Sigma\alpha\beta\gamma = \Sigma\alpha^3 - \Sigma\alpha^2\beta + 2\Sigma\alpha\beta\gamma.$$

On en conclut :

$$4(\Sigma\alpha^2\beta + \Sigma\alpha\beta\gamma) = 0.$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha\gamma(\alpha + \gamma) + \alpha\delta(\alpha + \delta) + \beta\gamma(\beta + \gamma) + \beta\delta(\beta + \delta) \\ + \gamma\delta(\gamma + \delta) + \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = 0. \end{aligned}$$

De cette dernière équation, il résulte:

1° que la surface admet la symétrie cristallographique du tétraèdre régulier;

2° qu'elle ne pénètre pas à l'intérieur du tétraèdre ombilical.

§ 4. — Sections planes.

25. — Tout plan, parallèle à l'un des plans coordonnés, coupe la surface suivant une hyperbole équilatère. En effet, les deux équations:

$$xyz = p^3, \quad z = c,$$

entraînent:

$$xy = \frac{p^3}{c}.$$

26. — Tout plan passant par l'un des axes coordonnés, coupe la surface suivant une cubique cuspidale (1). Car les deux équations:

$$xyz = p^3, \quad y = tx,$$

entraînent:

$$tx^2z = p^3,$$

ou

$$x^2z = a^3.$$

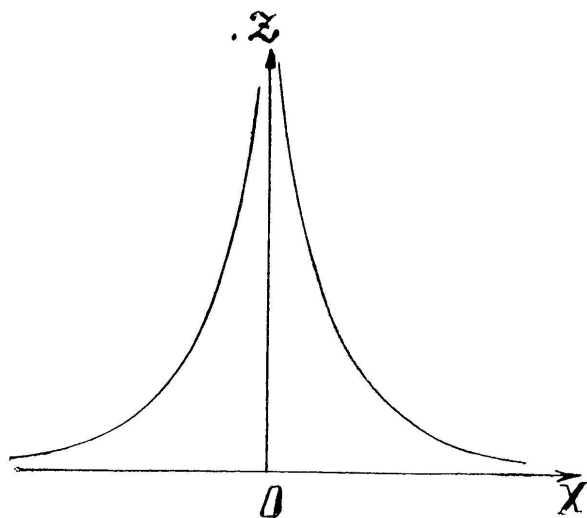


Fig. 5.

C'est une cubique $[5^0, c]$ dont le rebroussement se trouve à l'infini. Cette cubique est formée de deux branches, symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des z .

La constante a^3 a le même signe que t . La courbe rencontre les bissectrices des angles que font les axes coordonnés, aux points:

$$\pm x = z = a.$$

En ces points, les tangentes ont, pour coefficients angulaires:

$$\left[-\frac{2xz}{x^2} \right]_x = \mp 2.$$

Ceci démontre que les branches, prises séparément, ne sont pas symétriques par rapport aux bissectrices.

27. — Pour étudier les sections faites par des plans perpendiculaires à un Λ^3 , nous allons, tout d'abord, établir des formules de transformation des coordonnées, dont nous aurons souvent à faire usage.

Tout plan perpendiculaire à la droite $x = y = z$, coupe le trièdre coordonné trirectangle suivant un triangle équilatéral ABC, que nous prendrons comme triangle de référence.

Soient M un point quelconque du plan sécant ; x, y, z ses coordonnées rectilignes dans l'espace ; α, β, γ ses coordonnées trilinéaires absolues dans le plan sécant.

La figure montre qu'on a :

$$z = \gamma \sin \theta ;$$

mais :

$$3 \cos^2 \theta = 1 ;$$

donc

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{2}{3}} ;$$

et, par conséquent :

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \sqrt{\frac{2}{3}} .$$

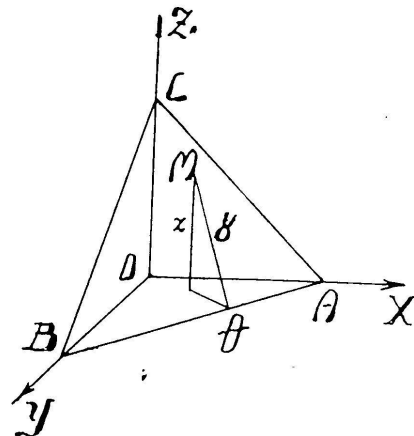


Fig. 6.

D'autre part :

$$\alpha + \beta + \gamma = (x + y + z) \sqrt{\frac{3}{2}} = \text{constante}$$

est l'équation du plan.

28. — Coupons donc la surface $xyz = p^3$ par le plan $x + y + z = l$; en coordonnées trilinéaires absolues, la section sera représentée par l'équation :

$$\alpha \beta \gamma = \left(p \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^3 = m^3 .$$

C'est donc la courbe que nous avons étudiée plus haut (2-12). Le triangle fondamental a pour hauteur :

$$\alpha + \beta + \gamma = l \sqrt{\frac{3}{2}} .$$

En faisant varier l de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient toutes les cubiques indiquées dans le tableau de la fin du n° 10.

29. — Toutes les sections planes ont des symétries particulières, mais qui sont compatibles avec la symétrie tétraédrique de la surface. Il suffit qu'on tienne compte de la position particulière du plan sécant (25, 26, 28).

§ 5. — Propriétés du plan tangent.

30. — Nous allons établir quelques propriétés de la surface, dont on ne verra pas immédiatement les relations avec la symétrie.

Nous représenterons les coordonnées courantes d'un point de l'espace par X, Y, Z , et celles du point de contact par x, y, z . L'équation du plan tangent est:

$$(X - x)yz + (Y - y)zx + (Z - z)xy = 0 ,$$

ou

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 3 .$$

Donc, les coordonnées à l'origine du plan tangent sont triples des coordonnées du point de contact. Soit ABC le triangle suivant lequel le plan tangent coupe le trièdre coordonné. Le point de contact est le centre de gravité du triangle ABC .

Tout plan tangent détermine, avec les plans coordonnés, un tétraèdre de volume constant:

$$V = \frac{9}{2} p^3 .$$

Tout ceci rappelle des propriétés de l'hyperbole algébrique plane du second ordre.

31. — Calculons la distance d'un plan tangent à l'origine. Cette distance est donnée par une formule bien connue de Géométrie analytique.

$$d = \frac{-3}{\pm \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}} = \frac{3xyz}{\sqrt{y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2}}$$

ou

$$d = \frac{3p^3}{\sqrt{y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2}} . \quad (1)$$

32. — Nous allons chercher l'intersection de la surface par un plan tangent. Un pareil plan coupe le trièdre coordonné suivant un triangle acutangle ABC, que nous prenons comme triangle de référence.

En représentant par θ' , θ'' , θ''' , les angles que font les plans coordonnés avec le plan tangent, nous aurons:

$$Z = \gamma \sin \theta''' .$$

(Cf. n° 27). Mais, on a:

$$\cos \theta''' = \frac{\frac{1}{z}}{+ \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}} ;$$

donc:

$$\sin \theta''' = \frac{+ \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}}}{+ \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}} = \frac{z \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2}} .$$

On a (30): $OA = 3x$; $OB = 3y$; $OC = 3z$. Appelons a , b , c les côtés du triangle ABC ; alors: $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{c}{3}$, et

$$\sin \theta''' = \frac{z \cdot \frac{c}{3}}{\frac{3p^3}{d}} = \frac{cdz}{9p^3} ,$$

par conséquent:

$$Z = \frac{cdz\gamma}{9p^3} . \quad (2)$$

Pour tout point de la section, nous aurons ainsi:

$$p^3 = XYZ = \frac{abc \cdot d^3 \cdot \alpha \beta \gamma}{729p^6} .$$

La cubique, suivant laquelle le plan tangent coupe la surface, a donc pour équation:

$$\alpha \beta \gamma = \frac{729p^9}{abc \cdot d^3} . \quad (3)$$

D'autre part, on a:

$$\frac{1}{3} \times \text{triangle ABC} \times d = \frac{1}{6} \times OA \times OB \times OC ;$$

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = \frac{27p^3}{d} . \quad (4)$$

Cherchons les coordonnées triangulaires du point de contact; dans la formule (2), supposons $Z = z$; il en résulte:

$$\text{par analogie:} \quad \left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{9p^3}{cd}; \\ \alpha &= \frac{9p^3}{ad}; \quad \beta = \frac{9p^3}{bd}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

A titre d'abréviation, nous poserons:

$$m^2 = \frac{9p^3}{d}; \quad (6)$$

les équations (3, 4, 5) deviennent alors:

$$\text{cubique:} \quad \alpha\beta\gamma = \frac{m^6}{abc}; \quad (7)$$

$$\text{condition:} \quad a\alpha + b\beta + c\gamma = 3m^2; \quad (8)$$

$$\text{point de contact:} \quad \left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{m^2}{a}; \quad \beta = \frac{m^2}{b}; \quad \gamma = \frac{m^2}{c}; \\ a\alpha &= b\beta = c\gamma = m^2. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Les dernières équations prouvent que le point de contact est le centre de gravité du triangle ABC (30).

33. — On sait que tout plan, tangent à une surface, coupe cette surface suivant une courbe à point double. Dans le cas actuel, nous obtiendrons une cubique acnodale $[3^0, a]$, qui généralisera celle du n° 11. En opérant comme pour cette dernière, nous allons rechercher les coordonnées d'un point quelconque de la courbe. Une droite, passant par le point $\left(\frac{m^2}{a}, \frac{m^2}{b}, \frac{m^2}{c}\right)$, a pour équation:

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = m^2 \left(\frac{u}{a} + \frac{v}{b} + \frac{w}{c} \right). \quad (10)$$

En résolvant les équations (7, 8, 10), on trouve:

$$\alpha = - \frac{am^2(cv - bw)^2}{bc(av - bu)(aw - cu)};$$

puis β, γ par permutation tournante. Ces équations prouvent que la courbe envisagée est unicursale.

34. — Examinons enfin la section faite par un plan parallèle au plan tangent, c'est-à-dire par un plan quelconque. Cherchons si la cubique rencontre les médianes du triangle de référence. Nous aurons les équations :

$$\text{cubique :} \quad \alpha\beta\gamma = k^3 ;$$

$$\text{médiane :} \quad b\beta = c\gamma ;$$

$$\text{condition :} \quad a\alpha + b\beta + c\gamma = 3m^2 .$$

On cherche d'abord une équation en α , en éliminant β et γ :

$$a^2\alpha^3 - 6am^2\alpha^2 + 9m^4\alpha - 4bck^3 = 0 .$$

D'après un théorème de Descartes, cette équation n'admet aucune racine négative, ou bien elle en admet une et une seule, suivant que la constante k est positive ou négative.

On cherche ensuite une équation en β , en éliminant α et γ :

$$\frac{1}{\beta^3} - \frac{3bm^2}{ack^3} \cdot \frac{1}{\beta} + \frac{2b^2}{ack^3} = 0 .$$

On forme le discriminant de cette équation, et l'on arrive aux conclusions suivantes :

$$\begin{array}{ll} k^3 < 0 & \text{cubique unipartite non singulière } [2^\circ, a] ; \\ k^3 = 0 & \text{cubique dégénérée en trois droites ;} \\ 0 < k^3 < \frac{m^6}{abc} & \text{cubique bipartite } [1^\circ, a] ; \\ k^3 = \frac{m^6}{abc} & \text{cubique acnodale } [3^\circ, a] ; \\ k^3 > \frac{m^6}{abc} & \text{cubique unipartite non singulière } [2^\circ, a]. \end{array}$$

Cette discussion ressemble beaucoup à celle du n° 10. Elle reste la même, que le triangle de référence soit acutangle ou non (32).

De cette discussion, l'on peut déduire le théorème suivant :

Si l'on demande le lieu géométrique des points dont les distances aux trois côtés d'un triangle ont un produit constant, et si l'on détermine cette constante de manière que la cubique soit unicursale, elle sera toujours acnodale, et le centre de gravité du triangle sera le point double isolé.

§ 6. — Sections sphériques.

35. — Nous allons étudier rapidement la courbe d'intersection de la surface:

$$xyz = p^3 \quad (1)$$

et de la sphère:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \quad (2)$$

En éliminant z entre (1) et (2), on trouve:

$$(x^2 + y^2 - a^2)x^2y^2 + p^6 = 0. \quad (3)$$

L'intersection complète des surfaces (1) et (2) est une courbe gauche algébrique du 6^e ordre, composée de quatre parties, dont chacune entoure la projection d'un ombilic sur la sphère.

Cette courbe gauche possède encore la symétrie du tétraèdre régulier.

Elle se projette sur le plan des x, y suivant la sextique que représente l'équation (3). On a nécessairement:

$$x^2 + y^2 - a^2 < 0.$$

Donc, la sextique, qui se compose évidemment de quatre ovales, est intérieure au cercle: $x^2 + y^2 = a^2$.

La courbe ne rencontre pas les axes.

36. — En résolvant l'équation (3), on obtient:

$$2xy^2 = x(a^2 - x^2) \pm \sqrt{x^6 - 2a^2x^4 + a^4x^2 - 4p^6}.$$

Examinons le cas où l'on aurait: $a = p\sqrt{3}$. La quantité subradicale deviendrait alors:

$$(x^2 - p^2)^2(x^2 - 4p^2).$$

Or (35) x est moindre que a ; donc: $x^2 < 3p^2$. La sextique se réduit à quatre points isolés: ce sont les projections des ombilics sur le plan des x, y .

37. — L'équation polaire de la sextique est la suivante:

$$\rho^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta (a^2 - \rho^2) = p^6, \quad (4)$$

ou bien:

$$\sin^2 2\theta = \frac{4p^6}{\rho^4(a^2 - \rho^2)}.$$

38. — Le maximum et le minimum de θ correspondent au minimum de $\sin 2\theta$, donc au maximum de :

$$\rho^4(a^2 - \rho^2) = (\rho^2)^2 \times (a^2 - \rho^2) .$$

Les rayons vecteurs correspondants sont donnés par l'équation :

$$\frac{\rho^2}{2} = \frac{a^2 - \rho^2}{4} = \frac{a^2}{3} ;$$

donc :

$$\rho = a \sqrt{\frac{2}{3}} .$$

On trouve ensuite :

$$\sin^2 2\theta_m = \frac{4p^6}{\frac{4}{9}a^4 \times \frac{1}{3}a^2} = \frac{27p^6}{a^6} ,$$

d'où :

$$\sin 2\theta_m = \pm \frac{3p^3 \sqrt{3}}{a^3} = \pm \left(\frac{p \sqrt{3}}{a} \right)^3 .$$

Cette valeur est toujours acceptable quand la sphère coupe la surface proposée, c'est-à-dire quand on a :

$$a \geq p \sqrt{3} .$$

Les valeurs de θ_m et les valeurs correspondantes de ρ pourront être construites à l'aide de la règle et du compas. On voit aisément qu'on obtient ainsi huit points de la sextique, et les tangentes en ces points. De l'origine, on peut donc mener huit tangentes à la courbe. Ce sont, d'ailleurs, quatre bitangentes.

39. — Recherchons le maximum et le minimum de ρ . Soit $F(\rho, \theta) = 0$ l'équation (4) du n° 37. On a :

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial F}{\partial \theta} d\theta = 0 ;$$

Mais $d\rho = 0$, donc $\frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin^2 \theta \cos^2 \theta) = 0 , \quad \text{d'où} \quad \theta = \frac{k\pi}{4} .$$

Comme la sextique ne rencontre pas les axes coordonnés (35),

on ne peut donner à k que des valeurs impaires. Il suffit d'examiner: $\theta = \frac{\pi}{4}$.

L'équation polaire de la sextique (37) donnera les valeurs correspondantes de ρ :

$$\rho^4(a^2 - \rho^2) = 4\rho^6,$$

ou bien:

$$\rho^6 - a^2\rho^4 + 4\rho^6 = 0.$$

Cette équation, du troisième degré en ρ^2 , admet toujours une racine négative, qui est à rejeter. Les deux autres sont positives quand on a: $a \geq p\sqrt{3}$.

40. — La sextique admet $4 \cdot C_4^2 = 24$ bitangentes.

De la discussion qui précède, ainsi d'ailleurs que de son équation cartésienne (35), il résulte qu'elle admet la symétrie du carré. Dans son plan, elle possède quatre axes de symétrie Λ^2 ; perpendiculairement à son plan, un Λ^4 .

41. — On arriverait à la même sextique en étudiant la surface:

$$xyz = -p^3.$$

Ce fait s'explique, de soi-même, si l'on se rappelle que la symétrie tétraédrique est une hémiedrie de la symétrie cubique.

42. — Nous allons chercher l'équation de la sextique gauche (35) en coordonnées sphériques trilineaires absolues. Nous

emploierons un système que nous a suggéré M. Louis FOUARGE, chargé de cours à l'Université de Liège.

Une sphère, ayant son centre à l'origine, coupe le trièdre coordonné suivant un triangle trirectangle ABC, que nous prendrons comme figure de référence. D'un point quelconque M, nous abaisserons, sur les côtés du triangle fondamental, les perpendiculaires α, β, γ . Soit

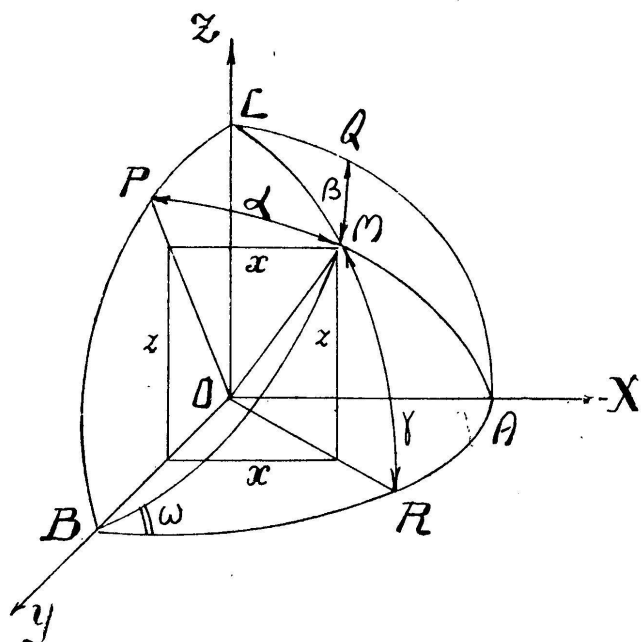


Fig. 7.

$OA = OB = OC = m$ le rayon de la sphère. On a encore $OM = m$. Les formules de transformation sont :

$$x = m \sin \alpha ; \quad y = m \sin \beta ; \quad z = m \sin \gamma .$$

De l'équation de la sphère : $x^2 + y^2 + z^2 = m^2$, on déduit :

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1 . \quad (1)$$

Un système de coordonnées sphériques n'est entièrement déterminé que si l'on connaît l'équation d'un grand cercle.

Dans le n° 1 de la 14^e année (novembre 1911) du *Bulletin scientifique de l'Association des Elèves des Ecoles Spéciales*, (A.E.E.S., Université de Liège), MM. V. LEJEUNE et A. SCHLAG ont donné l'équation d'un grand cercle, en employant les coordonnées :

$$\rho = BM ; \quad \omega = \text{angle } ABM .$$

Cette équation peut s'écrire (*loc. cit.*, page 17) :

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{1}{V \cos \omega + W \sin \omega} . \quad (2)$$

De la considération des triangles sphériques rectangles MRB, MPB, on tire :

$$\sin \gamma = \sin \rho \sin \omega , \quad \sin \alpha = \sin \rho \cos \omega ;$$

l'équation (2) peut s'écrire :

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{\sin \rho}{V \sin \alpha + W \sin \gamma} ,$$

ou :

$$V \sin \alpha + W \sin \gamma = \cos \rho ;$$

mais on a :

$$\rho = \frac{\pi}{2} - \beta ;$$

l'équation d'un grand cercle peut donc s'écrire :

$$a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = 0 . \quad (3)$$

On en conclurait aisément l'équation du grand cercle passant

par deux points donnés de la sphère, puis celle du grand cercle tangent à une courbe donnée en un point donné.

Si le point M doit appartenir à la surface tétraédrique que nous étudions, il faudra qu'on ait :

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = \frac{p^3}{m^3} . \quad (4)$$

En discutant les signes, on verra que l'équation (4) représente les quatre ovals et démontre la symétrie tétraédrique de leur ensemble.

§ 7. — Etude de la courbure.

43. — En géométrie infinitésimale, on démontre que la courbure totale, en un point ordinaire d'une surface, est l'inverse du produit des rayons de courbure principaux (19). Elle est susceptible de l'expression suivante :

$$k = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2}{\left\{ 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right\}^2} .$$

44. — Appliquons cette formule à la surface :

$$xyz = p^3 .$$

Les dérivées partielles ont été données plus haut (22). On a, après un calcul facile :

$$k = \frac{3p^6 x^4 y^4 z^4}{p^{12} \{ y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 \}^2} = \frac{3}{p^6 \left\{ \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right\}^2} \quad (1)$$

$$= \frac{3p^6}{\{ y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 \}^2} . \quad (2)$$

Ces formules nous montrent que la courbure est constamment positive. Tous les points de la surface sont donc des points elliptiques.

45. — De la formule (1), on déduit que c'est aux ombilics que la courbure totale est maxima.

46. — Recherchons les lignes en tous les points desquelles

la surface a la même courbure totale. D'après la formule (1), on doit avoir:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{c^2} .$$

Cette équation représente des surfaces algébriques du sixième ordre, à huit nappes, admettant les plans

$$x = \pm c ; \quad y = \pm c ; \quad z = \pm c ;$$

comme plans asymptotes. L'origine est un point quadruple isolé. Toute section faite dans l'une de ces surfaces par un plan parallèle à un plan coordonné, est une krenzcurve.

On obtient un résultat d'apparence plus simple en considérant l'équation (2). Une ligne de courbure totale constante est représentée par les équations:

$$y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 = a^4 , \quad xyz = p^3 .$$

On pourrait faire ici la même remarque qu'au n° 41.

47. — Au n° 31, nous avons trouvé la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan, tangent à la surface, au point (x, y, z) :

$$d = \frac{3p^3}{\sqrt{y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2}} .$$

Il en résulte:

$$d^4 = \frac{81p^{12}}{\{y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2\}^2} .$$

En comparant cette formule à la formule (2) du n° 44, on trouve:

$$k = \frac{d^4}{27p^6} .$$

THÉOREME: Si, en chaque point d'une ligne de courbure totale constante, on mène le plan tangent à la surface, tous ces plans enveloppent une sphère, dont le centre se trouve à l'origine.

Cette propriété est encore compatible avec la symétrie de la surface (41).

(A suivre).