Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 22 (1921-1922)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DÉDUCTION DES DÉRIVÉES DE FONCTIONS CIRCULAIRES PAR LA MÉTHODE GÉOMÉTRIQUE DES LIMITES

Autor: Petronievics, Branislav

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515739

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

DÉDUCTION
DES DÉRIVÉES DE FONCTIONS CIRCULAIRES PAR LA MÉTHODE GÉOMÉTRIQUE DES LIMITES

PAR

Branislav PETRONIEVICS (Belgrade).

Le principe de cette méthode peut être exprimé brièvement de la manière suivante: *déterminer la limite d'un rapport de lignes en s'appuyant sur les relations purement géométriques de ces lignes et d'autres lignes auxiliaires.*

Ce principe peut être illustré par la fig. 1. Dans cette figure, $OM = x$, $PM = y$, sont les coordonnées du point P de la courbe, $ON = x + \Delta x$, $QN = y + \Delta y$. Comme $\Delta PRQ \sim SMP$, on a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{PM}{SM}$. Plus le point Q sera proche du point P (P et Q étant les deux points de la sécante QS, et P le point de la tangente PT), plus le point S sera proche du point T, et plus, par conséquent, le rapport $\frac{PM}{SM}$ approchera du rapport $\frac{PM}{TM}$, d'où il s'ensuit que $\lim \frac{PM}{SM} = \frac{PM}{TM}$. Mais comme $\lim \frac{PM}{SM} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, on aura enfin $\frac{dy}{dx} = \frac{PM}{TM}$.

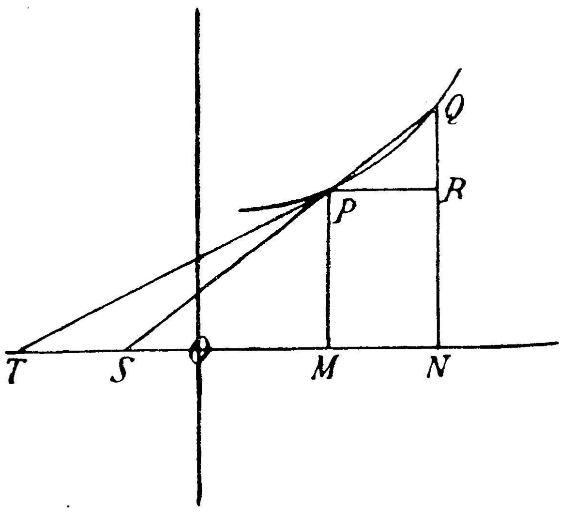

Fig. 1.

La méthode ainsi définie peut être appliquée immédiatement aux fonctions circulaires, tandis que son application devient plus compliquée et plus difficile pour d'autres fonctions. La déduction des dérivées de fonctions circulaires par cette méthode est beaucoup plus simple et plus évidente que celle par la méthode analytique, et elle est supérieure à celle-ci, non seulement au point de vue didactique, mais peut-être aussi au point de vue logique [1].

Dans le présent article, la dérivée de sin x a été déduite pour tous les quatre cas spéciaux :

$$x < \frac{\pi}{2}, \quad x > \frac{\pi}{2} \text{ et } < \pi, \quad x > \pi \text{ et } < \frac{3}{2}\pi, \quad x > \frac{3}{2}\pi \text{ et } < 2\pi,$$

tandis que pour les autres fonctions circulaires cette déduction n'a été faite que pour le premier cas seulement $\left(\text{pour } x < \frac{\pi}{2}\right)$. Cependant, dans les remarques, j'ai indiqué brièvement comment on doit l'effectuer pour les autres cas de ces fonctions. J'ai indiqué aussi brièvement comment déduire les dérivées de fonctions circulaires inverses.

I. — $\dfrac{d \sin x}{dx} = \cos x$.

1. — $0 < x < \frac{\pi}{2}$. — Dans la fig. 2, on a PZ $= x$, $\widehat{\text{QP}} = \Delta x$, P est le point de la tangente PT, PM le sinus de l'arc x (et

---

[1] Le premier qui ait tenté une déduction purement géométrique des dérivées de différentes fonctions était J. BARROW, dans ses *Lectiones geometricæ ;* c'est un fait historique constaté récemment par M. J. M. CHILD, qui voit en Barrow le premier inventeur du calcul infinitésimal. M. Child affirme (comp. sa traduction de l'ouvrage de Barrow, *Geometrical Lectures,* London, 1916, p. 123), que Barrow aurait déjà possédé aussi la déduction des dérivées de fonctions circulaires.

D'ALEMBERT, en expliquant la métaphysique du calcul différentiel (comp. son article « Differentiel » dans *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers,* 3e éd., MDCCLXXIX, t. X, p. 1016-17) affirme « que ce calcul ne consiste qu'à *déterminer algébriquement la limite d'un rapport de laquelle on a déjà l'expression en lignes, et à égaler ces deux limites, ce qui fait trouver une des lignes que l'on cherche.* » D'Alembert reconnaît donc (comme Leibniz avant lui), que le rapport-limite exprimé algébriquement dans un quotient différentiel peut toujours s'exprimer géométriquement, mais il n'entrevoit pas la possibilité de le déduire géométriquement.

Dans la méthode géométrique que j'ai appliquée, pour la première fois, aux dérivées de fonctions circulaires, dans un article en langue serbe paru dans le périodique *Nastavnik,* 1909, je me suis inspiré de l'article de D'Alembert, ne connaissant guère la tentative similaire de Barrow. Je n'ai eu également connaissance de la déduction demi-géométrique de ces dérivées, se trouvant dans l'ouvrage excellent de J. BOUSSINESQ, *Cours d'Analyse infinitésimale,* t. I, fasc. 1, p. 57-60, qu'après la publication de mon article.

de l'angle correspondant), QN le sinus de l'arc $x + \Delta x$ (et de l'angle correspondant).

Comme le sinus dans le premier quadrant est *positif* et comme il croît avec la croissance de l'arc, $\Delta \sin x$ sera *positive:*

$$RQ = QN - PM = \Delta \sin x \ .$$

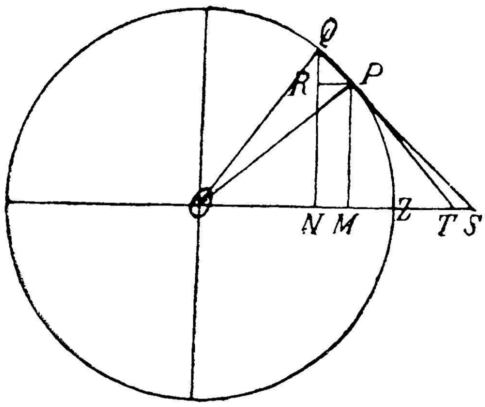

Fig. 2.

D'autre part on a:

$$\lim QP = \lim \Delta x \ ,$$

QP étant la partie de la sécante QS correspondant à l'arc $\widehat{QP}$.

De ΔPRQ $\sim$ SMP on a:

$$\frac{RQ}{QP} = \frac{PM}{PS} \ ,$$

et comme, en passant à la limite, ΔSMP coïncide avec TMP, on aura:

$$\lim \frac{RQ}{QP} = \lim \frac{PM}{PS} \equiv \frac{PM}{PT} \ . \tag{1}$$

D'autre part, de ΔTMP $\sim$ PMO, on a:

$$\frac{PM}{PT} = \frac{OM}{OP} = \cos x \ . \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) donnent:

$$\lim \frac{RQ}{QP} = \cos x \ . \tag{3}$$

Mais comme

$$\lim \frac{RQ}{QP} = \frac{\lim \Delta \sin x}{\lim \Delta x} = \frac{d \sin x}{dx} \ , \tag{4}$$

on aura enfin:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \ . \tag{5}$$

2. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. — Le sinus dans le deuxième quadrant (Fig. 3) étant *positif* et *décroissant* avec la croissance de l'arc, $\Delta \sin x$ sera *négative:*

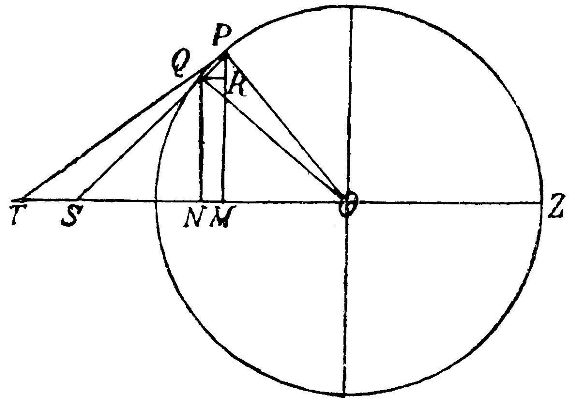

Fig. 3.

$$RP = QN - PM = - \Delta \sin x \ .$$

De même on a:

$$\lim QP = \lim \Delta x \ .$$

De $\Delta QRP \sim SNQ$ on a:

$$\frac{RP}{QP} = \frac{NQ}{SQ}$$

et, en passant à la limite,

$$\lim \frac{RP}{QP} = \lim \frac{NQ}{SQ} = \frac{PM}{PT} \ . \tag{1}$$

D'autre part, de $\Delta TMP \sim PMO$, on a:

$$\frac{PM}{PT} = \frac{OM}{OP} = \cos (180^\circ - x) = - \cos x \ . \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) donnent:

$$\lim \frac{RP}{QP} = - \cos x \ . \tag{3}$$

Mais comme:

$$\lim \frac{RP}{QP} = \frac{\lim - \Delta \sin x}{\lim \Delta x} = - \frac{\lim \Delta \sin x}{\lim \Delta x} = - \frac{d \sin x}{dx} \tag{4}$$

on aura:

$$- \frac{d \sin x}{dx} = - \cos x \ ,$$

d'où enfin:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \ . \tag{5}$$

3. $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$. — Le sinus dans le troisième quadrant (Fig. 4) étant *négatif* et *croissant* avec la croissance de l'arc, $\Delta \sin x$ sera *négative*:

$$RQ = -QN - (-PM) = -\Delta \sin x .$$

On a de même:

$$\lim QP = \lim \Delta x .$$

De $\Delta QRP \sim QNS$ on a:

$$\frac{RQ}{QP} = \frac{NQ}{SQ}$$

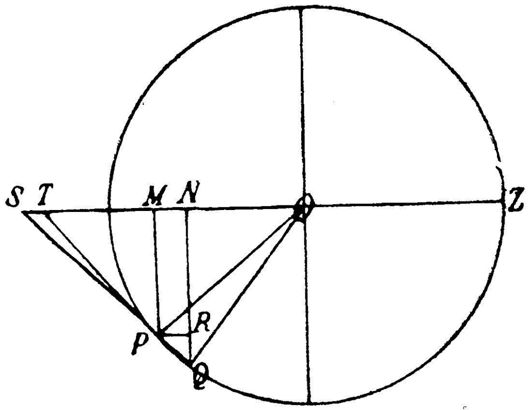

Fig. 4.

et, en passant à la limite,

$$\lim \frac{RQ}{QP} = \lim \frac{NQ}{SQ} = \frac{PM}{PT} . \qquad (1)$$

D'autre part, de $\Delta TMP \sim PMO$, on a:

$$\frac{PM}{PT} = \frac{OM}{OP} = \cos(x - 180^\circ) = -\cos x . \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnent:

$$\lim \frac{RQ}{QP} = -\cos x . \qquad (3)$$

Mais comme:

$$\lim \frac{RQ}{QP} = \frac{\lim -\Delta \sin x}{\lim \Delta x} = -\frac{\lim \Delta \sin x}{\lim \Delta x} = -\frac{d \sin x}{dx} \qquad (4)$$

on aura:

$$-\frac{d \sin x}{dx} = -\cos x ,$$

d'où enfin:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x . \qquad (5)$$

4. $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$. — Le sinus dans le quatrième quadrant (Fig. 5) étant *négatif* et *décroissant* avec la croissance de l'arc, $\Delta \sin x$ sera *positive*:

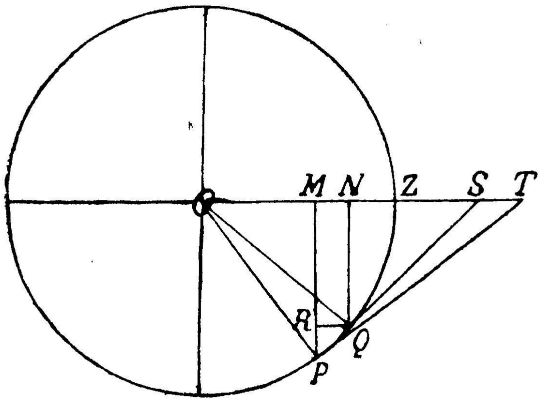

Fig. 5.

$$RP = - QN - (- PM)$$

$$= PM - QN = \Delta \sin x \; .$$

De même on a:

$$\lim QP = \lim \Delta x \; .$$

De $\Delta QRP \sim SNQ$ on a:

$$\frac{RP}{QP} = \frac{NQ}{SQ}$$

et, en passant à la limite

$$\lim \frac{RP}{QP} = \lim \frac{NQ}{SQ} = \frac{PM}{PT} \; . \qquad (1)$$

D'autre part, de $\Delta TMP \sim PMO$, on a:

$$\frac{PM}{PT} = \frac{OM}{OP} = \cos (360^\circ - x) = \cos x \; . \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) donnent:

$$\lim \frac{RP}{QP} = \cos x \; . \qquad (3)$$

Mais comme

$$\lim \frac{RP}{QP} = \frac{\lim \Delta \sin x}{\lim \Delta x} = \frac{d \sin x}{dx} \qquad (4)$$

on aura enfin:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \; . \qquad (5)$$

Remarque. — Par rapport à la fonction circulaire inverse $x = \sin y$ (ou $y = \arcsin x$), il suffit d'en déduire la dérivée pour le premier cas $x < \frac{\pi}{2}$.

Dans la fig. 2, nous aurons: $PZ = y$, $\overset{\frown}{QP} = \Delta y$, PM sera le sinus de l'arc y (et de l'angle correspondant), QN le sinus de l'arc $y + \Delta y$ (et de l'angle correspondant).

On aura alors:

$$RQ = QN - PM = \Delta \sin y = \Delta x \ ,$$

$$\lim QP = \lim \Delta y \ .$$

De $\Delta PRQ \sim SMP$ on a:

$$\frac{QP}{RQ} = \frac{PS}{PM} \ ,$$

et, en passant à la limite,

$$\lim \frac{QP}{RQ} = \lim \frac{PS}{PM} = \frac{PT}{PM} = \frac{OP}{OM} = \frac{1}{\cos y} \ . \qquad (1)$$

Mais comme

$$\lim \frac{QP}{RQ} = \frac{\lim \Delta y}{\lim \Delta \sin y} = \frac{d \operatorname{arc} \sin x}{dx} \qquad (2)$$

on aura enfin:

$$\frac{d \operatorname{arc} \sin x}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ .$$

$$\text{II.} \quad - \frac{d \cos x}{dx} = - \sin x \ .$$

De la fig. 2, qui représente le cas $x < \frac{\pi}{2}$, résulte immédiatement:

$$RP = ON - OM = - \Delta \cos x \ , \qquad \text{et} \qquad \lim QP = \lim \Delta x \ .$$

De $\Delta PRQ \sim SMP$ on a:

$$\frac{RP}{QP} = \frac{MS}{PS} \ ,$$

et, en passant à la limite,

$$\lim \frac{MS}{PS} = \frac{MT}{PT} = \frac{MP}{OP} = \sin x \ . \qquad (1)$$

Mais comme

$$\lim \frac{RP}{QP} = \frac{\lim - \Delta \cos x}{\lim \Delta x} = - \frac{d \cos x}{dx} \qquad (2)$$

on aura enfin:

$$\frac{d \cos x}{dx} = - \sin x \ . \qquad (3)$$

Remarque 1. — On peut aisément déduire, en suivant la déduction de ce premier cas et des cas correspondants pour le sinus, les trois autres cas pour le cosinus. Cette déduction se basera sur le fait que le signe — de l'équation $\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$ provient, dans les deux premiers cas, de la différence négative de cosinus, et dans les deux autres, du sinus négatif de l'arc.

Remarque 2. — En suivant cette déduction de la dérivée de cos x et celle d'arc sin x, on déduira aisément la dérivée pour arc cos x:

$$\frac{d \operatorname{arc} \cos x}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

$$\text{III.} - \frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} .$$

Dans la fig. 6, qui représente le premier cas $x < \frac{\pi}{2}$, ZT_1 est la tangente trigonométrique de l'arc PZ $= x$, ZT_2 la tangente trigonométrique de l'arc QZ $= x + \Delta x$, P est le point de la tangente PT, Q et P sont les deux points de la secante QS, PM est le sinus x, QN le sinus de l'arc $x + \Delta x$, PU $\|$ T_2T_1, MV $\|$ OQ et MY $\|$ OP sont des lignes auxiliaires.

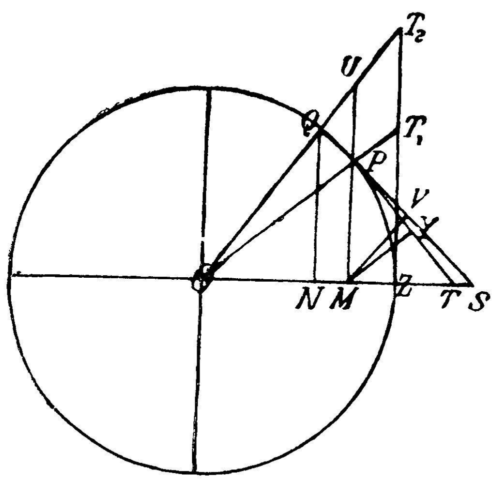

Fig. 6.

De la fig. 6 résulte immédiatement:

$$T_2T_1 = T_2Z - T_1Z = \Delta \operatorname{tg} x ,$$
$$\lim QP = \lim \Delta x .$$

On a d'abord:

$$\frac{T_2T_1}{UP} = \frac{T_1O}{PO} = \frac{ZO}{MO} = \frac{PO}{MO} = \frac{1}{\cos x} . \tag{1}$$

De ΔQPU $\sim$ VPM on a ensuite:

$$\frac{UP}{QP} = \frac{MP}{VP} \tag{2}$$

et comme, en passant à la limite, ΔVPM coincide avec YPM,

$$\lim \frac{\mathrm{UP}}{\mathrm{QP}} = \lim \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{VP}} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{YP}} ,$$

d'où, ΔYPM étant $\sim$ MOP,

$$\lim \frac{\mathrm{UP}}{\mathrm{QP}} = \frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{MO}} = \frac{1}{\cos x} . \tag{3}$$

Comme nous avons d'une part (équations 1, 2, 3)

$$\frac{\mathrm{T_2T_1}}{\mathrm{QP}} = \frac{\mathrm{T_2T_1}}{\mathrm{UP}} \cdot \frac{\mathrm{UP}}{\mathrm{QP}}$$

et

$$\lim \frac{\mathrm{T_2T_1}}{\mathrm{QP}} = \frac{\mathrm{T_2T_1}}{\mathrm{UP}} \cdot \lim \frac{\mathrm{UP}}{\mathrm{QP}} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{4}$$

et d'autre part:

$$\lim \frac{\mathrm{T_2T_1}}{\mathrm{QP}} = \frac{\lim \Delta \operatorname{tg} x}{\lim \Delta x} = \frac{d \operatorname{tg} x}{dx} \tag{5}$$

on aura enfin:

$$\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} . \tag{6}$$

Remarque 1. — La déduction pour les autres cas peut aisément être faite, en suivant la déduction de ce premier cas et des cas correspondants pour le sinus. Dans le deuxième cas, $\Delta \operatorname{tg} x$ sera *positive*, le cosinus *négatif*, dans le troisième $\Delta \operatorname{tg} x$ *positive*, le cosinus *négatif*, tandis que dans le quatrième tous les deux seront *positifs*.

Remarque 2. — En suivant la déduction de la dérivée de $\operatorname{tg} x$ et celle d'arc sin x, on déduira aisément la dérivée d'arc $\operatorname{tg} x$:

$$\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + x^2} .$$

IV. — $\dfrac{d \operatorname{ctg} x}{dx} = - \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

Dans la fig. 7, qui représente le premier cas $x < \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Z_1C_1}$ est la cotangente de l'arc $\mathrm{PZ_2} = x$, $\mathrm{Z_1C_2}$ la cotangente de l'arc

$QZ_2 = x + \Delta x$, P est le point de la tangente PT, Q et P les deux points de la sécante QS, $PM = \sin x$, $QN = \sin (x + \Delta x)$, $UP \parallel C_2C_1$ et $VP \parallel OQ$ des lignes auxiliaires.

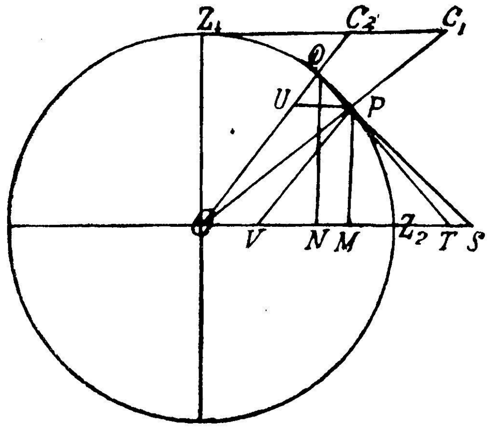

Fig. 7.

De la fig. 7 résulte immédiatement:

$$C_2C_1 = Z_1C_2 - Z_1C_1 = -\Delta \operatorname{ctg} x \ ,$$

$$\lim QP = \lim \Delta x \ .$$

On a d'abord:

$$\frac{C_2C_1}{UP} = \frac{C_1O}{PO} = \frac{C_1O}{Z_1O} = \frac{OP}{MP} = \frac{1}{\sin x} \ . \tag{1}$$

De $\Delta QPU \sim PSV$ on a ensuite:

$$\frac{UP}{QP} = \frac{VS}{PS} \tag{2}$$

et comme, en passant à la limite, ΔPSV coincide avec POT,

$$\lim \frac{UP}{QP} = \lim \frac{VS}{PS} = \frac{OT}{PT} \ ,$$

d'où, ΔPOT étant $\sim$ MOP,

$$\lim \frac{UP}{QP} = \frac{OP}{MP} = \frac{1}{\sin x} \ . \tag{3}$$

Comme d'une part (équations 1, 2, 3)

$$\lim \frac{C_2C_1}{QP} = \frac{C_2C_1}{UP} \cdot \lim \frac{UP}{QP} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin^2 x} \tag{4}$$

et d'autre part:

$$\lim \frac{C_2C_1}{QP} = \frac{\lim -\Delta \operatorname{ctg} x}{\lim \Delta x} = -\frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} \tag{5}$$

on aura enfin:

$$\frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} \ . \tag{6}$$

Remarque 1. — Le même résultat peut être aisément obtenu pour les trois autres cas. Dans le deuxième cas, $\Delta \operatorname{ctg} x$ sera *négative*, le sinus *positif*, dans le troisième et quatrième $\Delta \operatorname{ctg} x$ sera *négative*, *négatif* est aussi le sinus. Dans tous les quatre cas, le signe — de l'équation (6) provient de la différence négative de la cotangente.

Remarque 2. — En suivant la déduction de la dérivée de ctg x et celle d'arc sin x, on déduira aisément la dérivée d'arc ctg x:

$$\frac{d \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x}{dx} = - \sin^2 y = - \frac{1}{1+x^2} \, .$$

$$\text{V.} \quad - \quad \frac{d \sec x}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, .$$

Dans la fig. 8, qui représente le premier cas $x < \frac{\pi}{2}$, OS_1 est la secante trigonométrique de l'arc $PZ = x$, OS_2 la sécante trigonométrique de l'arc $QZ = x + \Delta x$, U le point d'intersection de cette sécante avec le cercle au radius OS_1, S_1 le point de la tangente S_1T', U et S_1 les deux points de la sécante S_1S', $PM = \sin x$, $QN = \sin (x + \Delta x)$, $ZV \parallel OQ$ et $ZY \parallel OP$ des lignes auxiliaires.

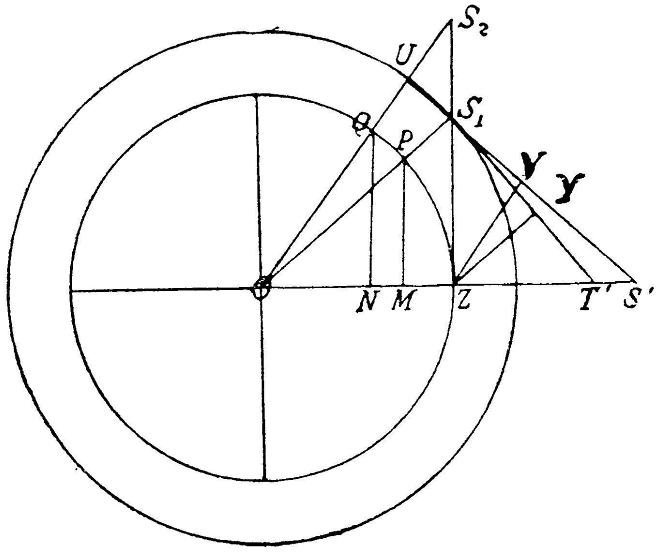

Fig. 8.

De la fig. 8 résulte immédiatement:

$$US_2 = OS_2 - OS_1 = \Delta \sec x$$

$$\lim QP = \lim \Delta x \, .$$

On a d'abord:

$$\frac{US_1}{QP} = \frac{S_1O}{PO} = \frac{ZO}{MO} = \frac{PO}{MO} = \frac{1}{\cos x} \, . \qquad (1)$$

De $\Delta S_2US_1 \sim ZVS_1$ on a ensuite:

$$\frac{US_2}{US_1} = \frac{VZ}{VS_1} \qquad (2)$$

et comme, en passant à la limite, ΔZVS_1 coïncide avec ZYS_1,

$$\lim \frac{US_2}{US_1} = \lim \frac{VZ}{VS_1} = \frac{YZ}{YS_1} ,$$

d'où (ΔZYS_1 étant $\sim$ PMO)

$$\lim \frac{US_2}{US_1} = \frac{MP}{MO} = \frac{\sin x}{\cos x} . \tag{3}$$

Comme nous avons d'une part (équations 1, 2, 3):

$$\lim \frac{US_2}{QP} = \frac{US_1}{QP} \cdot \lim \frac{US_2}{US_1} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \tag{4}$$

et d'autre part:

$$\lim \frac{US_2}{QP} = \frac{\lim \Delta \sec x}{\lim \Delta x} = \frac{d \sec x}{dx} \tag{5}$$

on aura enfin:

$$\frac{d \sec x}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} . \tag{6}$$

Remarque 1. — Le même résultat peut être aisément obtenu pour les trois autres cas. Dans le deuxième cas, $\Delta \sec x$ sera *positive*, le sinus *positif*, le cosinus *négatif*, dans le troisième $\Delta \sec x$ *négative*, le sinus et le cosinus *négatifs*, dans le quatrième $\Delta \sec x$ *négative*, le sinus *négatif*, le cosinus *positif*.

Remarque 2. — En suivant la déduction de la dérivée de sec x et celle d'arc sin x, on déduira aisément la dérivée d'arc sec x:

$$\frac{d \operatorname{arc} \sec x}{dx} = \frac{\cos^2 y}{\sin y} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} .$$

$$\textbf{VI.} \quad — \quad \frac{d \operatorname{cosec} x}{dx} = - \frac{\cos x}{\sin^2 x} .$$

Dans la fig. 9, qui représente le premier cas $x < \frac{\pi}{2}$, OC_1 est la cosécante de l'arc $PZ = x$, OC_2 la cosécante de l'arc $QZ =$

$x + \Delta x$, C_2 et U sont les deux points de la sécante C_2S', C_1 le point de la tangente $C'T'$, $PM = \sin x$, $QN = \sin(x + \Delta x)$.

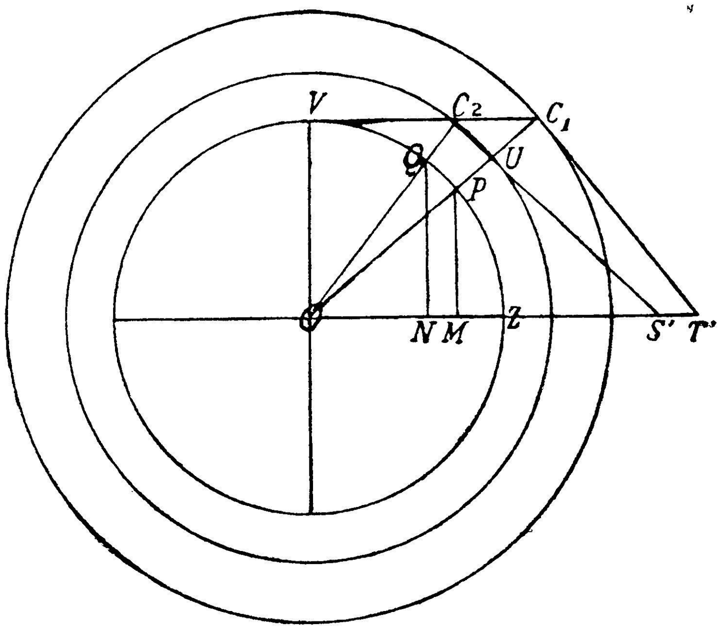

Fig. 9.

De la fig. 9 résulte immédiatement:

$$UC_1 = OC_2 - OC_1 = - \Delta \operatorname{cosec} x$$

$$\lim QP = \lim \Delta x \ .$$

On a d'abord:

$$\frac{UC_2}{PQ} = \frac{C_2O}{QO}$$

et, en passant à la limite,

$$\lim \frac{UC_2}{PQ} = \lim \frac{C_2O}{QO} = \frac{C_1O}{PO} = \frac{C_1O}{VO} = \frac{OP}{MP} = \frac{1}{\sin x} \ . \qquad (1)$$

De $\Delta C_1UC_2 \sim OUS'$ on a ensuite:

$$\frac{UC_1}{UC_2} = \frac{UO}{US'} \qquad (2)$$

et comme, en passant à la limite, $\Delta OUS'$ coïncide avec OC_1T' (le cercle au radius OC^2 coïncidant avec le cercle au radius OC_1)

$$\lim \frac{UC_1}{UC_2} = \lim \frac{UO}{US'} = \frac{C_1O}{C_1T'} = \frac{MO}{MP} = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad (3)$$

Comme nous avons d'une part (équations 1, 2, 3):

$$\lim \frac{UC_1}{PQ} = \lim \frac{UC_2}{PQ} \cdot \lim \frac{UC_1}{UC_2} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \equiv \frac{\cos x}{\sin^2 x} \tag{4}$$

et d'autre part:

$$\lim \frac{UC_1}{PQ} = \frac{\lim - \Delta \operatorname{cosec} x}{\lim \Delta x} = - \frac{d \operatorname{cosec} x}{dx}, \tag{5}$$

on aura enfin:

$$\frac{d \operatorname{cosec} x}{dx} = - \frac{\cos x}{\sin^2 x}. \tag{6}$$

Remarque 1. — Dans le deuxième cas, Δ cosec x sera *positive*, le sinus *positif*, le cosinus *négatif*, dans le troisième Δ cosec x *positive*, le sinus et le cosinus *négatifs*, dans le quatrième Δ cosec x *négative*, le sinus *négatif*, le cosinus *positif*.

Remarque 2. — On pourrait aussi déduire de la fig. 9 la dérivée de cotg x, comme la figure 8 peut servir pour la déduction de la dérivée de tg x.

Remarque 3. — En suivant la déduction de la dérivée de cosec x et celle d'arc sin x, on déduira aisément la dérivée pour arc cosec x:

$$\frac{d \operatorname{arc\,cosec} x}{dx} = - \frac{\sin^2 y}{\cos y} = - \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$