Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 22 (1921-1922)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DÉDUCTION DES DÉRIVÉES DE FONCTIONS CIRCULAIRES PAR

LA MÉTHODE GÉOMÉTRIQUE DES LIMITES

Autor: Petronievics, Branislav

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515739

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

DÉDUCTION

DES DÉRIVÉES DE FONCTIONS CIRCULAIRES PAR LA MÉTHODE GÉOMÉTRIQUE DES LIMITES

PAR

Branislav Petronievics (Belgrade).

Le principe de cette méthode peut être exprimé brièvement de la manière suivante: déterminer la limite d'un rapport de lignes en s'appuyant sur les relations purement géométriques de

ces lignes et d'autres lignes auxiliaires.

Ce principe peut être illustré par la fig. 1. Dans cette figure, OM = x, PM = y, sont les coordonnées du point P de la courbe, $ON = x + \Delta x$, $QN = y + \Delta y$. Comme $\Delta PRQ \sim SMP$, on a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{PM}{SM}$. Plus le point Q sera proche du point P (P et Q étant les deux points de la sécante QS,

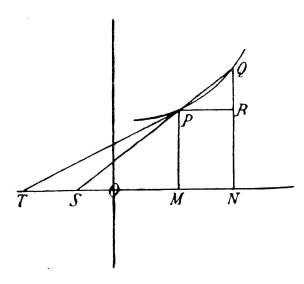


Fig. 1.

et P le point de la tangente PT), plus le point S sera proche du point T, et plus, par conséquent, le rapport $\frac{PM}{SM}$ approchera du rapport $\frac{PM}{TM}$, d'où il s'ensuit que $\lim \frac{PM}{SM} = \frac{PM}{TM}$. Mais comme $\lim \frac{PM}{SM} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, on aura enfin $\frac{dy}{dx} = \frac{PM}{TM}$.

La méthode ainsi définie peut être appliquée immédiatement aux fonctions circulaires, tandis que son application devient plus compliquée et plus difficile pour d'autres fonctions. La déduction des dérivées de fonctions circulaires par cette méthode est beaucoup plus simple et plus évidente que celle par la méthode analytique, et elle est supérieure à celle-ci, non seulement au point de vue didactique, mais peut-être aussi au point de vue logique ¹.

Dans le présent article, la dérivée de $\sin x$ a été déduite pour tous les quatre cas spéciaux :

$$x<rac{\pi}{2}$$
 , $x>rac{\pi}{2}$ et $<\pi$, $x>\pi$ et $<rac{3}{2}\pi$, $x>rac{3}{2}\pi$ et $<2\pi$,

tandis que pour les autres fonctions circulaires cette déduction n'a été faite que pour le premier cas seulement $\left(\text{pour }x < \frac{\pi}{2}\right)$. Cependant, dans les remarques, j'ai indiqué brièvement comment on doit l'effectuer pour les autres cas de ces fonctions. J'ai indiqué aussi brièvement comment déduire les dérivées de fonctions circulaires inverses.

$$I. - \frac{d \sin x}{dx} = \cos x .$$

1. — $0 < x < \frac{\pi}{2}$. — Dans la fig. 2, on a PZ = x, $\widehat{QP} = \Delta x$, P est le point de la tangente PT, PM le sinus de l'arc x (et

Dans la méthode géométrique que j'ai appliquée, pour la première fois, aux dérivées de fonctions circulaires, dans un article en langue serbe paru dans le périodique Nastavnik, 1909, je me suis inspiré de l'article de D'Alembert, ne connaissant guère la tentative similaire de Barrow. Je n'ai eu également connaissance de la déduction demi-géométrique de ces dérivées, se trouvant dans l'ouvrage excellent de J. Boussineso, Cours d'Analyse infinitésimale, t. I, fasc. 1, p. 57-60, qu'après la publication de mon article.

¹ Le premier qui ait tenté une déduction purement géométrique des dérivées de différentes fonctions était J. BARROW, dans ses Lectiones geometricæ; c'est un fait historique constaté récemment par M. J. M. CHILD, qui voit en Barrow le premier inventeur du calcul infinitésimal. M. Child affirme (comp. sa traduction de l'ouvrage de Barrow, Geometrical Lectures, London, 1916, p. 123), que Barrow aurait déjà possédé aussi la déduction des dérivées de fonctions circulaires.

D'ALEMBERT, en expliquant la métaphysique du calcul différentiel (comp. son article « Differentiel » dans Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, 3° éd., MDCCLXXIX, t. X, p. 1016-17) affirme « que ce calcul ne consiste qu'à déterminer algébriquement là limite d'un rapport de laquelle on a déjà l'expression en lignes, et à égaler ces deux limites, ce qui fait trouver une des lignes que l'on cherche. » D'Alembert reconnaît donc (comme Leibniz avant lui), que le rapport-limite exprimé algébriquement dans un quotient différentiel peut toujours s'exprimer géométriquement, mais il n'entrevoit pas la possibilité de le déduire géométriquement.

de l'angle correspondant), QN le sinus de l'arc $x + \Delta x$ (et de l'angle correspondant).

Comme le sinus dans le premier quadrant est positif et comme il croît avec la croissance de l'arc, Δ sin x sera positive:

$$RQ = QN - PM = \Delta \sin x .$$

D'autre part on a:

$$\lim QP = \lim \Delta x ,$$

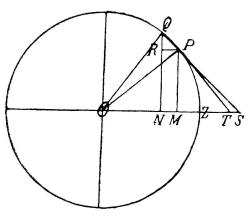


Fig. 2.

QP étant la partie de la sécante QS correspondant à l'arc \widehat{QP} . De $\Delta PRQ \sim SMP$ on a:

$$\frac{RQ}{OP} = \frac{PM}{PS} ,$$

et comme, en passant à la limite, Δ SMP coı̈ncide avec TMP, on aura:

$$\lim \frac{RQ}{QP} = \lim \frac{PM}{PS} \equiv \frac{PM}{PT} . \tag{1}$$

D'autre part, de $\Delta TMP \sim PMO$, on a:

$$\frac{PM}{PT} = \frac{OM}{OP} = \cos x . \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) donnent:

$$\lim \frac{RQ}{QP} = \cos x . \tag{3}$$

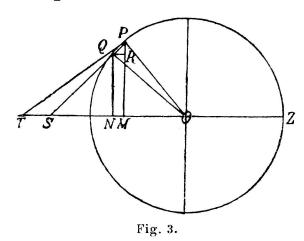
Mais comme

$$\lim \frac{RQ}{QP} = \frac{\lim \Delta \sin x}{\lim \Delta x} = \frac{d \sin x}{dx} , \qquad (4)$$

on aura enfin:

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x \ . \tag{5}$$

2. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. — Le sinus dans le deuxième quadrant (Fig. 3)



étant positif et décroissant avec la croissance de l'arc, $\Delta \sin x$ sera négative:

$$RP = QN - PM = -\Delta \sin x .$$

De même on a:

$$\lim QP = \lim \Delta x .$$

De $\triangle QRP \sim SNQ$ on a:

$$\frac{RP}{QP} = \frac{NQ}{SQ}$$

et, en passant à la limite,

$$\lim \frac{RP}{QP} = \lim \frac{NQ}{SQ} = \frac{PM}{PT} . \tag{1}$$

D'autre part, de $\Delta TMP \sim PMO$, on a:

$$\frac{\text{PM}}{\text{PT}} = \frac{\text{OM}}{\text{OP}} = \cos(180^{\circ} - x) = -\cos x . \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) donnent:

$$\lim \frac{\mathrm{RP}}{\mathrm{QP}} = -\cos x \ . \tag{3}$$

Mais comme:

$$\lim \frac{RP}{QP} = \frac{\lim - \Delta \sin x}{\lim \Delta x} = -\frac{\lim \Delta \sin x}{\lim \Delta x} = -\frac{d \sin x}{dx}$$
(4)

on aura:

$$-\frac{d\sin x}{dx} = -\cos x ,$$

d'où enfin:

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x \ . \tag{5}$$

3. $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$. — Le sinus dans le troisième quadrant (Fig. 4) étant négatif et croissant avec la croissance de l'arc, $\Delta \sin x$ sera négative:

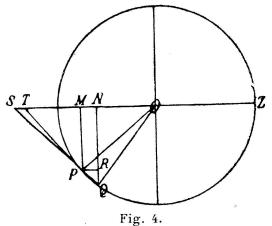
$$\mathrm{RQ} = -\ \mathrm{QN} - (-\ \mathrm{PM}) = -\ \Delta \sin x \ .$$

On a de même:

 $\lim QP = \lim \Delta x .$

De \triangle QRP \sim QNS on a:

$$\frac{RQ}{QP} = \frac{NQ}{SQ}$$



et, en passant à la limite,

$$\lim \frac{RQ}{QP} = \lim \frac{NQ}{SQ} = \frac{PM}{PT} . \tag{1}$$

D'autre part, de Δ TMP \sim PMO, on a:

$$\frac{\text{PM}}{\text{PT}} = \frac{\text{OM}}{\text{OP}} = \cos\left(x - 180^{\circ}\right) = -\cos x . \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) donnent:

$$\lim \frac{\mathrm{RQ}}{\mathrm{QP}} = -\cos x \quad . \tag{3}$$

Mais comme:

$$\lim \frac{\text{RQ}}{\text{QP}} = \frac{\lim - \Delta \sin x}{\lim \Delta x} = -\frac{\lim \Delta \sin x}{\lim \Delta x} = -\frac{d \sin x}{dx}$$
(4)

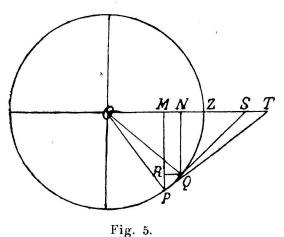
on aura:

$$-\frac{d\sin x}{dx} = -\cos x ,$$

d'où enfin:

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x \ . \tag{5}$$

4. $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$. — Le sinus dans le quatrième quadrant (Fig. 5) étant négatif et décroissant avec la croissance de l'arc,



 $\Delta \sin x \text{ sera } positive:$ RP = -QN - (-PM)

$$= PM - QN = \Delta \sin x .$$

De même on a:

$$\lim QP = \lim \Delta x .$$

De $\triangle QRP \sim SNQ$ on a:

$$\frac{RP}{QP} = \frac{NQ}{SQ}$$

et, en passant à la limite

$$\lim \frac{RP}{QP} = \lim \frac{NQ}{SQ} = \frac{PM}{PT} . \tag{1}$$

D'autre part, de $\Delta TMP \sim PMO$, on a:

$$\frac{\text{PM}}{\text{PT}} = \frac{\text{OM}}{\text{OP}} = \cos(360^{\circ} - x) = \cos x . \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) donnent:

$$\lim \frac{\mathrm{RP}}{\mathrm{QP}} = \cos x \ . \tag{3}$$

Mais comme

$$\lim \frac{\text{RP}}{\text{OP}} = \frac{\lim \Delta \sin x}{\lim \Delta x} = \frac{d \sin x}{dx} \tag{4}$$

on aura enfin:

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x \ . \tag{5}$$

Remarque. — Par rapport à la fonction circulaire inverse $x=\sin y$ (ou $y=\arcsin x$), il suffit d'en déduire la dérivée pour le premier cas $x<\frac{\pi}{2}$.

Dans la fig. 2, nous aurons: PZ = y, $\widehat{QP} = \Delta y$, PM sera le sinus de l'arc y (et de l'angle correspondant), QN le sinus de l'arc $y + \Delta y$ (et de l'angle correspondant).

On aura alors:

$$RQ = QN - PM = \Delta \sin y = \Delta x ,$$

$$\lim QP = \lim \Delta y .$$

De $\Delta PRQ \sim SMP$ on a:

$$\frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{RQ}} = \frac{\mathrm{PS}}{\mathrm{PM}} \; ,$$

et, en passant à la limite,

$$\lim \frac{QP}{RO} = \lim \frac{PS}{PM} = \frac{PT}{PM} = \frac{OP}{OM} = \frac{1}{\cos y}.$$
 (1)

Mais comme

$$\lim \frac{QP}{RO} = \frac{\lim \Delta y}{\lim \Delta \sin y} = \frac{d \arcsin x}{dx} \tag{2}$$

on aura enfin:

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$II. -\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x.$$

De la fig. 2, qui représente le cas $x < \frac{\pi}{2}$, résulte immédiatement:

$$RP = ON - OM = -\Delta \cos x$$
, et $\lim QP = \lim \Delta x$.

De $\Delta PRQ \sim SMP$ on a:

$$\frac{RP}{QP} = \frac{MS}{PS} ,$$

et, en passant à la limite,

$$\lim \frac{MS}{PS} = \frac{MT}{PT} = \frac{MP}{OP} = \sin x . \tag{1}$$

Mais comme

$$\lim \frac{\text{RP}}{\text{QP}} = \frac{\lim -\Delta \cos x}{\lim \Delta x} = -\frac{d \cos x}{dx} \tag{2}$$

on aura enfin:

$$\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x \ . \tag{3}$$

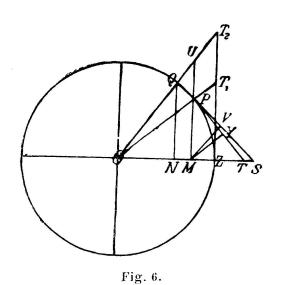
Remarque 1. — On peut aisément déduire, en suivant la déduction de ce premier cas et des cas correspondants pour le sinus, les trois autres cas pour le cosinus. Cette déduction se basera sur le fait que le signe — de l'équation $\frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$ provient, dans les deux premiers cas, de la différence négative de cosinus, et dans les deux autres, du sinus négatif de l'arc.

Remarque 2. — En suivant cette déduction de la dérivée de $\cos x$ et celle d'arc $\sin x$, on déduira aisément la dérivée pour arc $\cos x$:

$$\frac{d \arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

III.
$$-\frac{d \operatorname{tg} x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$$
.

Dans la fig. 6, qui représente le premier cas $x < \frac{\pi}{2}$, ZT_1 est la tangente trigonométrique de l'arc PZ = x, ZT_2 la tangente



trigonométrique de l'arc $QZ = x + \Delta x$, P est le point de la tangente PT, Q et P sont les deux points de la secante QS, PM est le sinus x, QN le sinus de l'arc $x + \Delta x$, PU || T_2T_1 , MV || OQ et MY || OP sont des lignes auxiliaires.

De la fig. 6 résulte immédiatement:

$$T_2 T_1 = T_2 Z - T_1 Z = \Delta \operatorname{tg} x ,$$

$$\lim QP = \lim \Delta x .$$

On a d'abord:

$$\frac{\mathbf{T_2}\,\mathbf{T_1}}{\mathbf{UP}} = \frac{\mathbf{T_1}\,\mathbf{O}}{\mathbf{PO}} = \frac{\mathbf{ZO}}{\mathbf{MO}} = \frac{\mathbf{PO}}{\mathbf{MO}} = \frac{\mathbf{1}}{\cos x} \,. \tag{1}$$

De $\triangle QPU \sim VPM$ on a ensuite:

$$\frac{\mathrm{UP}}{\mathrm{QP}} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{VP}} \tag{2}$$

et comme, en passant à la limite, ΔVPM coincide avec YPM,

$$\lim \frac{\mathrm{UP}}{\mathrm{QP}} = \lim \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{VP}} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{YP}}$$
,

d'où, ΔYPM étant $\sim MOP$,

$$\lim \frac{\mathrm{UP}}{\mathrm{QP}} = \frac{\mathrm{PO}}{\mathrm{MO}} = \frac{1}{\cos x} \ . \tag{3}$$

Comme nous avons d'une part (équations 1, 2, 3)

$$\frac{\mathbf{T_2}\,\mathbf{T_1}}{\mathbf{QP}} = \frac{\mathbf{T_2}\,\mathbf{T_1}}{\mathbf{UP}} \cdot \frac{\mathbf{UP}}{\mathbf{QP}}$$

et

$$\lim \frac{\mathbf{T_2} \, \mathbf{T_1}}{\mathbf{OP}} = \frac{\mathbf{T_2} \, \mathbf{T_1}}{\mathbf{UP}} \cdot \lim \frac{\mathbf{UP}}{\mathbf{QP}} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{4}$$

et d'autre part:

$$\lim \frac{T_2 T_1}{OP} = \frac{\lim \Delta \operatorname{tg} x}{\lim \Delta x} = \frac{d \operatorname{tg} x}{dx}$$
 (5)

on aura enfin:

$$\frac{d \lg x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} \ . \tag{6}$$

Remarque 1. — La déduction pour les autres cas peut aisément être faite, en suivant la déduction de ce premier cas et des cas correspondants pour le sinus. Dans le deuxième cas, $\Delta \operatorname{tg} x$ sera positive, le cosinus négatif, dans le troisième $\Delta \operatorname{tg} x$ positive, le cosinus négatif, tandis que dans le quatrième tous les deux seront positifs.

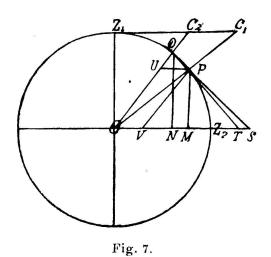
Remarque 2. — En suivant la déduction de la dérivée de $\operatorname{tg} x$ et celle d'arc $\sin x$, on déduira aisément la dérivée d'arc $\operatorname{tg} x$:

$$\frac{d \arctan \lg x}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2} .$$

$$IV. - \frac{d \operatorname{ctg} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Dans la fig. 7, qui représente le premier cas $x < \frac{\pi}{2}$, Z_1C_1 est la cotangente de l'arc $PZ_2 = x$, Z_1C_2 la cotangente de l'arc

 $QZ_2 = x + \Delta x$, P est le point de la tangente PT, Q et P les



deux points de la sécante QS, PM = $\sin x$, QN = $\sin (x + \Delta x)$, UP || C₂C₁ et VP || OQ des lignes auxiliaires.

De la fig. 7 résulte immédiatement:

$$\mathbf{C_2}\,\mathbf{C_1} = \mathbf{Z_1}\,\mathbf{C_2} - \mathbf{Z_1}\,\mathbf{C_1} = - \,\Delta\,\mathrm{ctg}\,x \ ,$$

$$\lim\,\mathbf{QP} = \lim\Delta x \ .$$

On a d'abord:
$$\frac{C_2 C_1}{UP} = \frac{C_1 O}{PO} = \frac{C_1 O}{Z_1 O} = \frac{OP}{MP} = \frac{1}{\sin x}.$$

De $\Delta QPU \sim PSV$ on a ensuite:

$$\frac{\text{UP}}{\text{QP}} = \frac{\text{VS}}{\text{PS}} \tag{2}$$

et comme, en passant à la limite, ΔPSV coincide avec POT,

$$\lim \frac{\mathrm{UP}}{\mathrm{OP}} = \lim \frac{\mathrm{VS}}{\mathrm{PS}} = \frac{\mathrm{OT}}{\mathrm{PT}} \ ,$$

d'où, ΔPOT étant $\sim MOP$,

$$\lim \frac{\mathrm{UP}}{\mathrm{QP}} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{MP}} = \frac{1}{\sin x} \ . \tag{3}$$

Comme d'une part (équations 1, 2, 3)

$$\lim \frac{C_2 C_1}{QP} = \frac{C_2 C_1}{UP} \cdot \lim \frac{UP}{QP} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$
(4)

et d'autre part:

$$\lim \frac{C_2 C_1}{QP} = \frac{\lim -\Delta \operatorname{ctg} x}{\lim \Delta x} = -\frac{d \operatorname{ctg} x}{dx}$$
 (5)

on aura enfin:

$$\frac{d\operatorname{ctg} x}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x} \,. \tag{6}$$

Remarque 1. — Le même résultat peut être aisément obtenu pour les trois autres cas. Dans le deuxième cas, $\Delta \cot x$ sera négative, le sinus positif, dans le troisième et quatrième $\Delta \cot x$ sera négative, négatif est aussi le sinus. Dans tous les quatre

cas, le signe — de l'équation (6) provient de la différence négative de la cotangente.

Remarque 2. — En suivant la déduction de la dérivée de ctg x et celle d'arc sin x, on déduira aisément la dérivée d'arc ctg x:

$$\frac{d \operatorname{arc etg} x}{dx} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+x^2} .$$

$$V. - \frac{d \sec x}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

Dans la fig. 8, qui représente le premier cas $x < \frac{\pi}{2}$, OS, est la secante trigonométrique de l'arc PZ = x, OS₂ la sécante

trigonométrique de l'arc $QZ = x + \Delta x$, U le point d'intersection de cette sécante avec le cercle au radius OS, S, le point de la tangente S₁T', U et S₁ les deux points de la sécante S_1S' , $PM = \sin x$, $ON = \sin (x + \Delta x),$ ZV || OQ et ZY || OP des lignes auxiliaires.

De la fig. 8 résulte immédiatement:

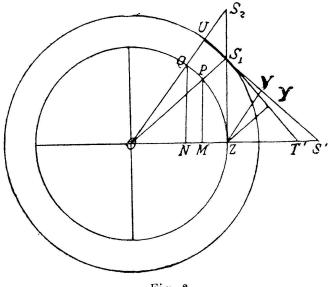


Fig. 8.

$$US_2 = OS_2 - OS_1 = \Delta \sec x$$

$$\lim QP = \lim \Delta x .$$

On a d'abord:

$$\frac{\text{US}_1}{\text{OP}} = \frac{\text{S}_1 \text{ O}}{\text{PO}} = \frac{\text{ZO}}{\text{MO}} = \frac{\text{PO}}{\text{MO}} = \frac{1}{\cos x} . \tag{1}$$

De $\Delta S_2 US_1 \sim ZVS_1$ on a ensuite:

$$\frac{\text{US}_2}{\text{US}_1} = \frac{\text{VZ}}{\text{VS}_1} \tag{2}$$

et comme, en passant à la limite, ΔZVS, coïncide avec ZYS,

$$\lim \frac{\mathrm{US_2}}{\mathrm{US_1}} = \lim \frac{\mathrm{VZ}}{\mathrm{VS_1}} = \frac{\mathrm{YZ}}{\mathrm{YS_1}} \ ,$$

d'où (ΔZYS_1 étant $\sim PMO$)

$$\lim \frac{\text{US}_2}{\text{US}_1} = \frac{\text{MP}}{\text{MO}} = \frac{\sin x}{\cos x} \ . \tag{3}$$

Comme nous avons d'une part (équations 1, 2, 3):

$$\lim \frac{\text{US}_2}{\text{QP}} = \frac{\text{US}_1}{\text{QP}} \cdot \lim \frac{\text{US}_2}{\text{US}_1} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$
(4)

et d'autre part:

$$\lim \frac{\text{US}_2}{\text{QP}} = \frac{\lim \triangle \sec x}{\lim \triangle x} = \frac{d \sec x}{dx}$$
 (5)

on aura enfin:

$$\frac{d \sec x}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \ . \tag{6}$$

Remarque 1. — Le même résultat peut être aisément obtenu pour les trois autres cas. Dans le deuxième cas, $\Delta \sec x$ sera positive, le sinus positif, le cosinus négatif, dans le troisième $\Delta \sec x$ négative, le sinus et le cosinus négatifs, dans le quatrième $\Delta \sec x$ négative, le sinus négatif, le cosinus positif.

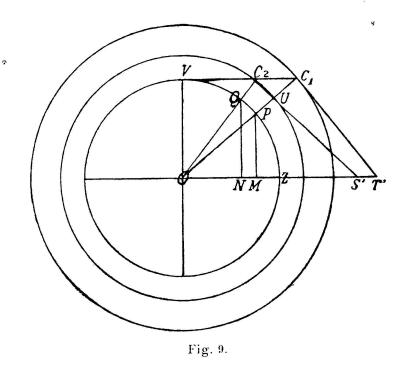
Remarque 2. — En suivant la déduction de la dérivée de sec x et celle d'arc sin x, on déduira aisément la dérivée d'arc sec x:

$$\frac{d \operatorname{arc} \sec x}{dx} = \frac{\cos^2 y}{\sin y} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \ .$$

VI.
$$-\frac{d \csc x}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$
.

Dans la fig. 9, qui représente le premier cas $x < \frac{\pi}{2}$, OC_1 est la cosécante de l'arc PZ = x, OC_2 la cosécante de l'arc QZ =

 $x + \Delta x$, C_2 et U sont les deux points de la sécante C_2S' , C_1 le point de la tangente C'T', PM = $\sin x$, QN = $\sin (x + \Delta x)$.



De la fig. 9 résulte immédiatement:

$$\label{eq:UC1} \begin{split} \mathrm{UC_1} &= \mathrm{OC_2} - \mathrm{OC_1} = - \ \Delta \operatorname{cosec} x \\ & \lim \mathrm{QP} = \lim \Delta x \ . \end{split}$$

On a d'abord:

$$\frac{\mathrm{UC_2}}{\mathrm{PQ}} = \frac{\mathrm{C_2\,O}}{\mathrm{QO}}$$

et, en passant à la limite,

$$\lim \frac{\mathrm{UC_2}}{\mathrm{PQ}} = \lim \frac{\mathrm{C_2 \, O}}{\mathrm{QO}} = \frac{\mathrm{C_1 \, O}}{\mathrm{PO}} = \frac{\mathrm{C_1 \, O}}{\mathrm{VO}} = \frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{MP}} = \frac{1}{\sin x} \,. \tag{1}$$

De $\Delta C_1 U C_2 \sim OUS'$ on a ensuite:

$$\frac{UC_1}{UC_2} = \frac{UO}{US'} \tag{2}$$

et comme, en passant à la limite, ΔOUS' coïncide avec OC₁T' (le cercle au radius OC² coïncidant avec le cercle au radius OC₁)

$$\lim \frac{\text{UC}_1}{\text{UC}_2} = \lim \frac{\text{UO}}{\text{US}'} = \frac{\text{C}_1 \text{O}}{\text{C}_1 \text{T}'} = \frac{\text{MO}}{\text{MP}} = \frac{\cos x}{\sin x}$$
(3)

Comme nous avons d'une part (équations 1, 2, 3):

$$\lim \frac{\mathrm{UC_1}}{\mathrm{PQ}} = \lim \frac{\mathrm{UC_2}}{\mathrm{PQ}} \cdot \lim \frac{\mathrm{UC_1}}{\mathrm{UC_2}} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \equiv \frac{\cos x}{\sin^2 x} \tag{4}$$

et d'autre part:

$$\lim \frac{\text{UC}_{1}}{\text{PQ}} = \frac{\lim -\Delta \operatorname{cosec} x}{\lim \Delta x} = -\frac{d \operatorname{cosec} x}{dx} , \qquad (5)$$

on aura enfin:

$$\frac{d \csc x}{dx} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} . \tag{6}$$

Remarque 1. — Dans le deuxième cas, Δ cosec x sera positive, le sinus positif, le cosinus négatif, dans le troisième Δ cosec x positive, le sinus et le cosinus négatifs, dans le quatrième Δ cosec x négative, le sinus négatif, le cosinus positif.

Remarque 2. — On pourrait aussi déduire de la fig. 9 la dérivée de cotg x, comme la figure 8 peut servir pour la déduction de la dérivée de tg x.

Remarque 3. — En suivant la déduction de la dérivée de cosec x et celle d'arc sin x, on déduira aisément la dérivée pour arc cosec x:

$$\frac{d \operatorname{arc cosec} x}{dx} = -\frac{\sin^2 y}{\cos y} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$