

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	22 (1921-1922)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA CRISTALLOGRAPHIE
<b>Autor:</b>	Winants, Marcel
<b>Kapitel:</b>	§ 5. — Une deuxième surface.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-515738">https://doi.org/10.5169/seals-515738</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

En mettant à part le cas de la dégénérescence, on a toujours affaire à une cubique [2<sup>o</sup>, a], qui satisfait aux règles de la symétrie autour d'un  $\Lambda^3$  (62).

89. — Donnons un tableau-résumé de la discussion qui précède :

$k^3 > h^3$  : Rencontre les prolongements des côtés. Chacune des trois branches entoure une région hachurée;

$k^3 = h^3$  : Circonscrite au triangle ABC;

$\frac{h^3}{3} < k^3 < h^3$  : Rencontre les côtés (entre P et C);

$k^3 = \frac{h^3}{3}$  : Trois droites concourantes (dégénérescence);

$\frac{h^3}{4} < k^3 < \frac{h^3}{3}$  : Rencontre les côtés (entre P et Q);

$k^3 = \frac{h^3}{4}$  : Tangente aux trois côtés;

$k^3 < \frac{h^3}{4}$  : Ne rencontre pas les côtés.

Toujours trois asymptotes concourantes.

### § 5. — Une deuxième surface.

90. — Nous allons esquisser une théorie de la surface :

$$y^2 z + z^2 x + x^2 y = p^3 . \quad (p > 0)$$

Elle admet certainement un axe de symétrie ternaire, d'équations :

$$x = y = z .$$

Elle ne rencontre aucun des axes coordonnés, ne pénètre pas dans le trièdre où les trois coordonnées sont négatives. Elle coupe les plans coordonnés suivant trois cubiques [5<sup>o</sup>, c], analogues à celle que nous avons étudiée plus haut (26, 75) :

$$x = 0 , \quad y^2 z = p^3 ;$$

$$y = 0 , \quad z^2 x = p^3 ;$$

$$z = 0 , \quad x^2 y = p^3 .$$

91. — Un plan parallèle à l'un des plans coordonnés ( $z = c$ ), fournit, comme section, la cubique :

$$x^2 y + c y^2 + c^2 x = p^3 ,$$

que nous avons discutée (81). En faisant voyager le plan sécant, en laissant varier  $c$  de  $-\infty$  à  $+\infty$ , on engendre la surface par le déplacement continu de la section, ce qui permet d'en avoir une première idée assez claire.

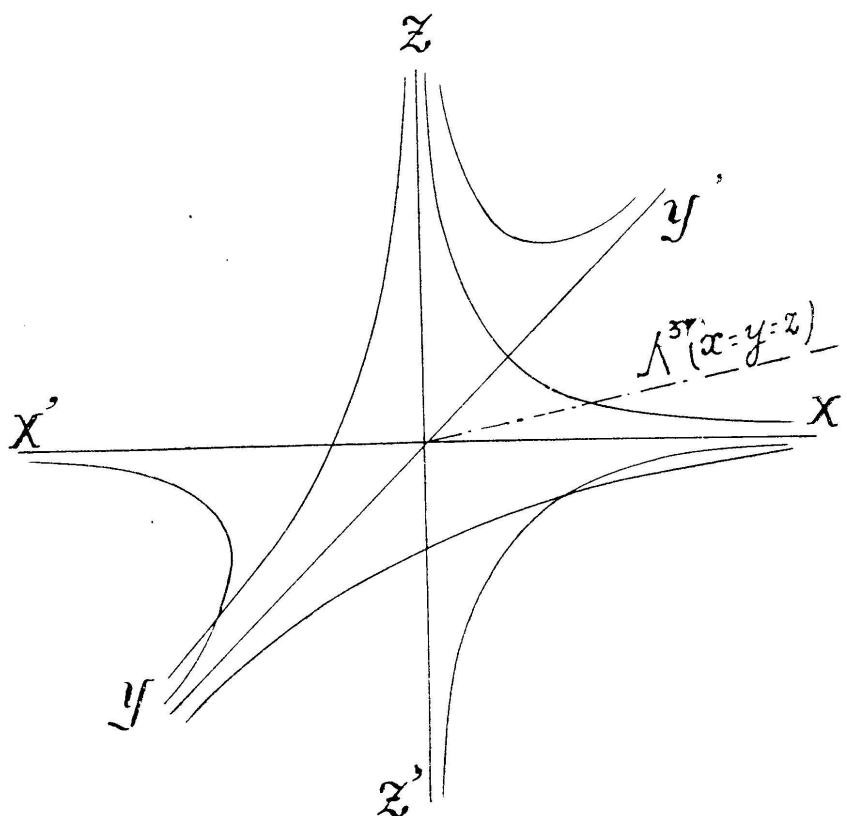


Fig. 17.

Un plan perpendiculaire au  $\Lambda^3$  (27) donne une cubique unipartite non unicursale, à trois asymptotes concourantes (82, 84, 89). Les directions asymptotiques de cette courbe restent invariables, quand le plan sécant se déplace (82, 83). Le lieu des asymptotes se compose de trois plans qui se coupent suivant le  $\Lambda^3$ . Du tableau-résumé du n° 89, on déduit que la surface est hémimorphe (63, 68).

92. — De l'étude que nous avons faite de la dernière cubique (83), résulte encore la propriété suivante: Les trois plans des asymptotes forment des dièdres dont les trois plans bissecteurs sont des plans de symétrie de la surface.

L'axe ternaire rencontre la surface en un seul point:

$$x = y = z = \frac{p}{\sqrt[3]{3}} ;$$

celui-ci n'est pas un centre, car si l'on y transporte l'origine des coordonnées, l'équation de la surface devient:

$$\Sigma \left( y' + \frac{p}{\sqrt[3]{3}} \right)^2 \left( z' + \frac{p}{\sqrt[3]{3}} \right) = p^3 ,$$

et cette équation renferme un terme de degré pair et deux termes de degrés impairs.

La surface possède bien la symétrie de la tourmaline (63):

$$\Lambda^3 , \quad 3P .$$

93. — En  $x, y, z$ , le plan tangent a pour équation:

$$(z^2 + 2xy)X + (x^2 + 2yz)Y + (y^2 + 2zx)Z = 3p^3 .$$

Au point où la surface rencontre son axe de symétrie, le plan tangent a pour équation:

$$X + Y + Z = p\sqrt[3]{9} .$$

Le point de contact est donc un point ordinaire (19), et, par conséquent, un ombilic (62).

94. — Signalons enfin trois points de coordonnées simples, appartenant à la surface:

$$-p, \quad p, \quad p ; \quad p, \quad -p, \quad p ; \quad p, \quad p, \quad -p .$$

En ces trois points, les plans tangents ont pour équations:

$$\begin{aligned} X - 3Y + Z + 3p &= 0 ; \\ X + Y - 3Z + 3p &= 0 ; \\ -3X + Y + Z + 3p &= 0 . \end{aligned}$$

Ces trois plans tangents se coupent sur l'axe ternaire.

95. — Une discussion, semblable aux précédentes, prouverait que les équations:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0 ; \quad y^2z + z^2x + x^2y = 0 ,$$

représentent des cônes rhomboédriques, ayant donc la symétrie du spath d'Islande:

$$C, \quad \Lambda^3, \quad 3\Lambda^2,$$

$$3P .$$