Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 22 (1921-1922)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA CRISTALLOGRAPHIE
Autor: Winants, Marcel
Kapitel: § 2. — Deux cubiques planes.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515738

§ 2. — Deux cubiques planes.

64. — Soit d'abord la courbe que représente l'équation:

$$x^3 + y^3 = a^3 , \tag{1}$$

où l'on suppose: a $> o$. Elle rencontre les axes aux points (a, o) et (o, a). Elle admet la bissectrice $(x = y)$ comme axe de symétrie Λ^2. L'équation (1) peut s'écrire:

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = a^3 ;$$

la courbe est donc asymptote à la droite:

$$x + y = 0 .$$

La cubique rencontre la droite de l'infini en un seul point réel: elle est du groupe b (1). A toute valeur de x correspond une seule valeur réelle de y, et réciproquement; par conséquent, la courbe ne possède aucun point double, elle n'est pas unicursale. Mais elle est unipartite. C'est donc une cubique [2°, b].

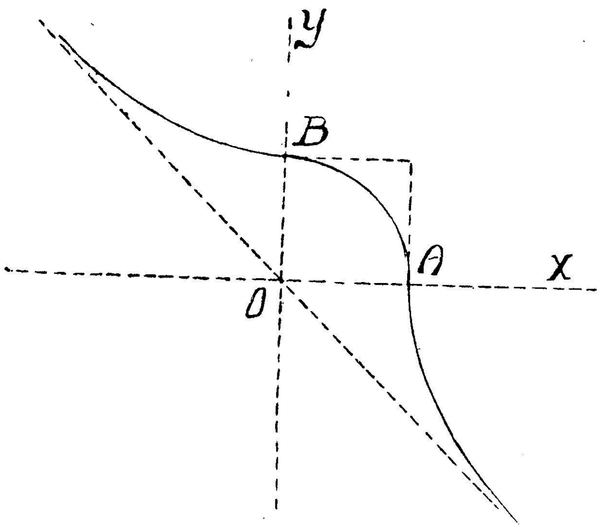

Fig. 8.

En dérivant deux fois l'équation (1), on trouve:

$$x^2 + y^2 y' = 0 ; \tag{2}$$

$$2x + 2yy'^2 + y^2 y'' = 0 . \tag{3}$$

De (2), on tire

$$y' = -\frac{x^2}{y^2} \leq 0 ;$$

l'ordonnée y est constamment décroissante. En A et B, les tangentes sont parallèles aux axes coordonnés. Des équations (2) et (3) combinées, on déduit le rayon de courbure (50):

$$\rho = \frac{(x^4 + y^4)^{\frac{3}{2}}}{2a^3 xy} ;$$

cette formule montre que les points A et B sont des inflexions.

65. — Prenons un triangle équilatéral comme figure de référence, et considérons la cubique:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = m^3 . \qquad (4)$$

Par les sommets du triangle fondamental, menons des parallèles à ses côtés. Elles déterminent un triangle équilatéral A′B′C′, que nous prenons comme nouvelle figure de référence.

Pour un point quelconque du plan (M), nous aurons:

$$\alpha = \mathrm{PM} \; ; \qquad \alpha' = \mathrm{P'M} \; .$$

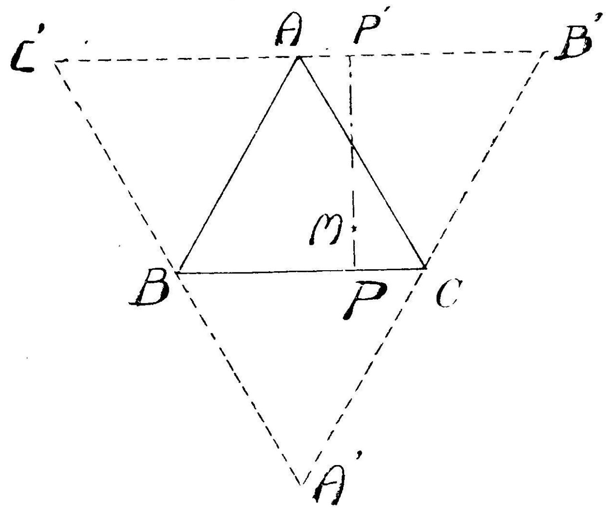

Fig. 9.

Si h désigne la hauteur du premier triangle, il viendra:

$$\begin{aligned}
h &= \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' \, , \\
2h &= \alpha' + \beta' + \gamma' = 2(\alpha + \alpha') \; ; \\
2\alpha &= - \alpha' + \beta' + \gamma' \; ; \\
2\beta &= \alpha' - \beta' + \gamma' \; ; \\
2\gamma &= \alpha' + \beta' - \gamma' \; ;
\end{aligned}$$

L'équation (4) peut donc s'écrire:

$$\begin{aligned}
8m^3 &= (-\alpha' + \beta' + \gamma')^3 + (\alpha' - \beta' + \gamma')^3 + (\alpha' + \beta' - \gamma')^3 \\
&= (\alpha' + \beta' + \gamma')^3 - 24\,\alpha'\beta'\gamma' = 8h^3 - 24\,\alpha'\beta'\gamma' \; ;
\end{aligned}$$

donc: $\alpha'\beta'\gamma' = \frac{1}{3}\,(h^3 - m^3)$.

Nous retrouvons une cubique dont il s'est agi précédemment (2).

66. — Comme digression, nous pourrons énoncer le théorème suivant:

On admet la règle des signes des coordonnées trilinéaires absolues, et l'on considère un triangle équilatéral de référence. Le lieu géométrique des points dont le produit des distances aux trois côtés du triangle fondamental est une constante, est en même temps le lieu géométrique des points dont la somme des cubes des distances aux côtés du triangle médian est également constante.

§ 3. — Une première surface.

67. — Nous allons étudier la surface:

$$x^3 + y^3 + z^3 = p^3 ,$$

où la constante p est positive. Cette surface ne possède aucun point dans le trièdre où les trois coordonnées sont négatives. Elle admet un axe ternaire d'équations:

$$x = y = z ,$$

et trois plans de symétrie:

$$y = z ; \qquad z = x ; \qquad x = y ;$$

passant par l'axe Λ^3. Nous avons donc bien affaire à une surface-tourmaline (63).

L'axe Λ^3 rencontre la surface en un ombilic (62):

$$x = y = z = \frac{p}{\sqrt[3]{3}} .$$

68. — Coupons la surface par un plan normal au Λ^3 Plus haut (27), nous avons établi des formules pour la transformation des coordonnées:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \sqrt{\frac{2}{3}} ;$$

$$\alpha + \beta + \gamma = (x + y + z) \sqrt{\frac{3}{2}} ;$$

la section a donc pour équation triangulaire:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \left(p \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 . \tag{1}$$

Si le plan sécant a pour équation:

$$x + y + z = l ,$$