**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 22 (1921-1922)
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA CRISTALLOGRAPHIE
**Autor:** Winants, Marcel
**Kapitel:** § 2. — Deux cubiques planes.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-515738

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 20.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

## § 2. — Deux cubiques planes.

64. — Soit d'abord la courbe que représente l'équation:

$$x^3 + y^3 = a^3 , \qquad (1)$$

où l'on suppose: $a > o$. Elle rencontre les axes aux points $(a, o)$ et $(o, a)$. Elle admet la bissectrice $(x = y)$ comme axe de symétrie $\Lambda^2$. L'équation (1) peut s'écrire:

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = a^3 ;$$

la courbe est donc asymptote à la droite:

$$x + y = 0 .$$

La cubique rencontre la droite de l'infini en un seul point réel: elle est du groupe $b$ (1). A toute valeur de $x$ correspond une seule valeur réelle de $y$, et réciproquement; par conséquent, la courbe ne possède aucun point double, elle n'est pas unicursale. Mais elle est unipartite. C'est donc une cubique [2°, $b$].

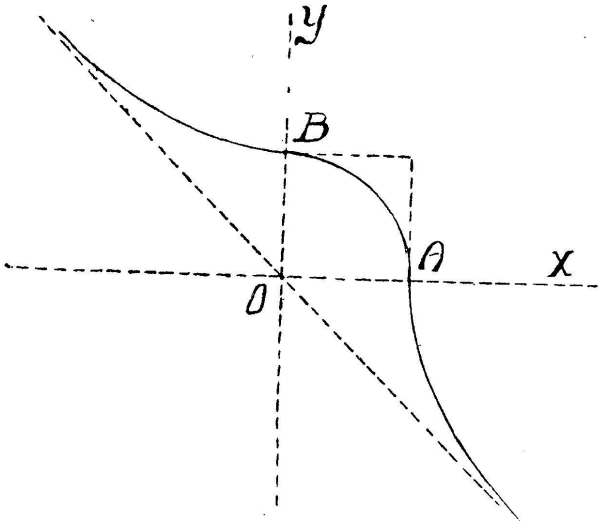


Fig. 8.

En dérivant deux fois l'équation (1), on trouve:

$$x^2 + y^2 y' = 0 ; \qquad (2)$$

$$2x + 2yy'^2 + y^2 y'' = 0 . \qquad (3)$$

De (2), on tire

$$y' = -\frac{x^2}{y^2} \leq 0 ;$$

l'ordonnée $y$ est constamment décroissante. En A et B, les tangentes sont parallèles aux axes coordonnés. Des équations (2) et (3) combinées, on déduit le rayon de courbure (50):

$$\rho = \frac{(x^4 + y^4)^{\frac{3}{2}}}{2a^3 xy} ;$$

cette formule montre que les points A et B sont des inflexions.

65. — Prenons un triangle équilatéral comme figure de référence, et considérons la cubique:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = m^3 \ . \qquad (4)$$

Par les sommets du triangle fondamental, menons des parallèles à ses côtés. Elles déterminent un triangle équilatéral A'B'C', que nous prenons comme nouvelle figure de référence.

Pour un point quelconque du plan (M), nous aurons:

$$\alpha = \mathrm{PM} \ ; \qquad \alpha' = \mathrm{P'M} \ .$$

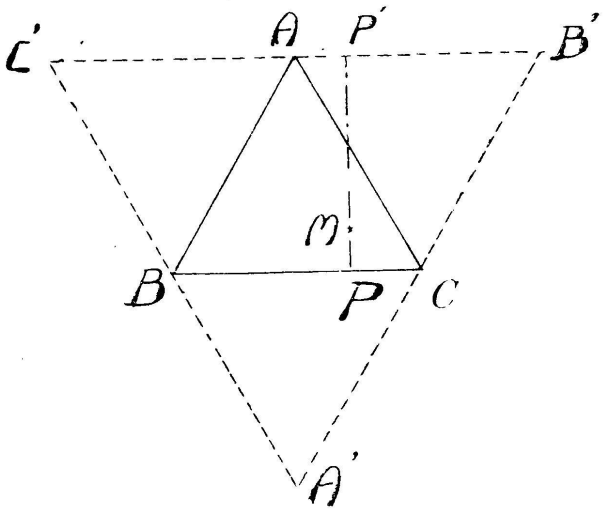

Fig. 9.

Si $h$ désigne la hauteur du premier triangle, il viendra:

$$h = \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma' \ ,$$
$$2h = \alpha' + \beta' + \gamma' = 2(\alpha + \alpha') \ ;$$
$$2\alpha = -\alpha' + \beta' + \gamma' \ ;$$
$$2\beta = \alpha' - \beta' + \gamma' \ ;$$
$$2\gamma = \alpha' + \beta' - \gamma' \ ;$$

L'équation (4) peut donc s'écrire:

$$8m^3 = (-\alpha' + \beta' + \gamma')^3 + (\alpha' - \beta' + \gamma')^3 + (\alpha' + \beta' - \gamma')^3$$
$$= (\alpha' + \beta' + \gamma')^3 - 24\,\alpha'\beta'\gamma' = 8h^3 - 24\,\alpha'\beta'\gamma' \ ;$$

donc : $\alpha'\beta'\gamma' = \frac{1}{3}(h^3 - m^3)$.

Nous retrouvons une cubique dont il s'est agi précédemment (2).

66. — Comme digression, nous pourrons énoncer le théorème suivant:

On admet la règle des signes des coordonnées trilinéaires absolues, et l'on considère un triangle équilatéral de référence. Le lieu géométrique des points dont le produit des distances aux trois côtés du triangle fondamental est une constante, est

en même temps le lieu géométrique des points dont la somme des cubes des distances aux côtés du triangle médian est également constante.

## § 3. — Une première surface.

67. — Nous allons étudier la surface:

$$x^3 + y^3 + z^3 = p^3 ,$$

où la constante $p$ est positive. Cette surface ne possède aucun point dans le trièdre où les trois coordonnées sont négatives. Elle admet un axe ternaire d'équations:

$$x = y = z ,$$

et trois plans de symétrie:

$$y = z ; \qquad z = x ; \qquad x = y ;$$

passant par l'axe $\Lambda^3$. Nous avons donc bien affaire à une surface-tourmaline (63).

L'axe $\Lambda^3$ rencontre la surface en un ombilic (62):

$$x = y = z = \frac{p}{\sqrt[3]{3}} .$$

68. — Coupons la surface par un plan normal au $\Lambda^3$ Plus haut (27), nous avons établi des formules pour la transformation des coordonnées:

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \sqrt{\frac{2}{3}} ;$$

$$\alpha + \beta + \gamma = (x + y + z)\sqrt{\frac{3}{2}} ;$$

la section a donc pour équation triangulaire:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = \left(p\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3 . \qquad (1)$$

Si le plan sécant a pour équation:

$$x + y + z = l ,$$