Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 22 (1921-1922)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA CRISTALLOGRAPHIE
Autor: Winants, Marcel
Kapitel: § 3. — Une surface quadratique
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515738

De ces équations, on tire successivement:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^3}{z^3}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^3}{z^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{3x^3y^3}{z^7};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{3x^2(x^4+z^4)}{z^7}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{3y^2(y^4+z^4)}{z^7}.$$

Les équations aux coordonnées des ombilics sont donc:

$$\frac{x^2(x^4+z^4)}{x^6+z^6} = \frac{x^3y^3}{x^3y^3} = \frac{y^2(y^4+z^4)}{y^6+z^6},$$

c'est-à-dire: $x^2 = y^2 = z^2$.

Cette méthode semble ne donner que les extrémités des axes ternaires. Mais, à un certain moment, on a simplifié par une puissance de z. D'ailleurs, les ombilics, extrémités des axes quaternaires, ont, chacun, deux coordonnées nulles. Il peut donc arriver que notre méthode l'emporte sur la méthode classique.

N'existe-t-il pas d'autres ombilics ? Une transformation des coordonnées rectilignes fournirait la réponse à cette question.

56. — La courbure totale (43) est ici:

$$k = \frac{\dfrac{9x^2y^2(x^4+z^4)(y^4+z^4)}{z^{14}} - \dfrac{9x^6y^6}{z^{14}}}{\left\{1+\dfrac{x^6}{z^6}+\dfrac{y^6}{z^6}\right\}^2} = \frac{9p^4x^2y^2z^2}{(x^6+y^6+z^6)^2}.$$

Par raison de continuité, cette formule s'applique également aux points où la surface rencontre les plans coordonnés.

La courbure est ordinairement positive; mais elle s'annule tout le long des trois sections principales. Cette propriété est entièrement conforme à la symétrie.

§ 3. — **Une surface quadratique.**

57. — Il va s'agir de la surface: $\dfrac{x^4+y^4}{a^4} + \dfrac{z^4}{c^4} = 1$, où l'on suppose $a \neq c$. Cette surface n'est pas de révolution; elle est extérieure à l'ellipsoïde de révolution: $\dfrac{X^2+Y^2}{a^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = 1$, sauf qu'elle le touche en six points (52).

58. — En recherchant les ombilics par la méthode indiquée (22), on trouve:

$$c^2 x = \pm c^2 y = \pm a^2 z ,$$

ce qui donne huit ombilics. Mais il y en a certainement deux autres aux extrémités de l'axe quaternaire (21), d'équations: $x = y = 0$.

La surface semble donc admettre dix ombilics.

59. — La courbure totale (43) est:

$$k = \frac{9\, a^8 c^{12} x^2 y^2 z^2}{\left\{ a^8 z^6 + c^8 (x^6 + y^6) \right\}^2} .$$

La courbure totale est constamment positive, sauf qu'elle s'annule le long des trois sections principales.

60. — Toutes les propriétés précédentes (57, 58, 59) sont conformes à la symétrie quadratique (ou tétragonale), ayant pour symbole (15):

$$\mathrm{C},\ \Lambda^4,\ 2\Lambda'^2,\ 2\Lambda''^2,$$
$$\mathrm{P},\ 2\mathrm{P}',\ 2\mathrm{P}''.$$

Voici les équations des plans de symétrie:

$$\mathrm{P} : z = 0 \ ; \qquad \mathrm{P}' : x = 0 \ ; \ y = 0 \ ; \qquad \mathrm{P}'' : x \pm y = 0 \ .$$

Les axes Λ sont perpendiculaires aux plans de symétrie, et passent par le centre.

Chapitre III.

Quelques principes généraux.

61. — Nous avons déjà rencontré plusieurs principes généraux (5, 7, 21).

Il nous semble qu'une méthode scientifique a d'autant plus de valeur qu'elle possède un plus grand nombre de pareils principes.

Notre bagage n'est certes pas encore bien vaste. Mais nous serons très heureux si nous avons pu montrer que notre méthode était, tout au moins, capable de formuler des règles générales.