§ 2. — Une surface ayant la symétrie d'un cube.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

§ 2. — Une surface ayant la symétrie d'un cube.

54. — Nous allons nous occuper de la surface:

$$x^4 + y^4 + z^4 = p^4 .$$

Elle est extérieure à la sphère:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = p^2 ,$$

sauf qu'elle la touche aux six points où les deux surfaces coupent les axes coordonnés (qui sont rectangulaires).

La forme même de l'équation montre que la surface admet la symétrie du cube:

$$C , \ 3A^4 , \ 4A^3 , \ 6A^2 ,$$
$$3P , \qquad 6P' .$$

Les axes quaternaires de symétrie sont les axes coordonnés; et les plans P sont les plans coordonnés. Les axes ternaires ont pour équations: $x = \pm y = \pm z$. Les axes binaires sont les bissectrices des angles que font les axes coordonnés; et les plans P' bissèquent les dièdres coordonnés.

55. — Les points où cette surface est rencontrée par ses axes ternaires et ses axes quaternaires, sont des ombilics (21). Nous allons essayer de le vérifier par un calcul direct. Nous avons rappelé plus haut (22) les équations auxquelles doivent satisfaire les coordonnées des ombilics:

$$\frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x} \times \frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} .$$

Pour la surface actuelle, calculons les dérivées premières et secondes de z. On a:

$$x^3 + z^3 \frac{\partial z}{\partial x} = 0 ; \qquad y^3 + z^3 \frac{\partial z}{\partial y} = 0 ;$$

$$3x^2 + 3z^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + z^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 ;$$

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + z^3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = 0 .$$

De ces équations, on tire successivement:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^3}{z^3} \; ; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^3}{z^3} \; ; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{3x^3y^3}{z^7} \; ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{3x^2(x^4+z^4)}{z^7} \; ; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{3y^2(y^4+z^4)}{z^7} \; .$$

Les équations aux coordonnées des ombilics sont donc:

$$\frac{x^2(x^4+z^4)}{x^6+z^6} = \frac{x^3y^3}{x^3y^3} = \frac{y^2(y^4+z^4)}{y^6+z^6} \; ,$$

c'est-à-dire: $x^2 = y^2 = z^2$.

Cette méthode semble ne donner que les extrémités des axes ternaires. Mais, à un certain moment, on a simplifié par une puissance de z. D'ailleurs, les ombilics, extrémités des axes quaternaires, ont, chacun, deux coordonnées nulles. Il peut donc arriver que notre méthode l'emporte sur la méthode classique.

N'existe-t-il pas d'autres ombilics ? Une transformation des coordonnées rectilignes fournirait la réponse à cette question.

56. — La courbure totale (43) est ici:

$$k = \frac{\dfrac{9x^2y^2(x^4+z^4)(y^4+z^4)}{z^{14}} - \dfrac{9x^6y^6}{z^{14}}}{\left\{1+\dfrac{x^6}{z^6}+\dfrac{y^6}{z^6}\right\}^2} = \frac{9p^4x^2y^2z^2}{(x^6+y^6+z^6)^2} \; .$$

Par raison de continuité, cette formule s'applique également aux points où la surface rencontre les plans coordonnés.

La courbure est ordinairement positive; mais elle s'annule tout le long des trois sections principales. Cette propriété est entièrement conforme à la symétrie.

§ 3. — Une surface quadratique.

57. — Il va s'agir de la surface: $\dfrac{x^4+y^4}{a^4} + \dfrac{z^4}{c^4} = 1$, où l'on suppose $a \neq c$. Cette surface n'est pas de révolution; elle est extérieure à l'ellipsoïde de révolution: $\dfrac{X^2+Y^2}{a^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = 1$, sauf qu'elle le touche en six points (52).