

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	22 (1921-1922)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	 SUR LES TRACTRICES ET LES COURBES ÉQUITANGENTIELLES
<b>Autor:</b>	De Jans, C.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-515734">https://doi.org/10.5169/seals-515734</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SUR LES TRACTRICES ET LES COURBES ÉQUITANGENTIELLES

PAR

C. DE JANS (Gand).

**1.** La présente Note a pour but, non d'apporter des résultats nouveaux dans la solution du problème général des tractrices et des courbes équitangentielles, mais de montrer que l'usage des coordonnées intrinsèques rend pour ainsi dire intuitive la démonstration des formules fondamentales, et permet d'établir d'une manière facile certaines propriétés des tractrices du cercle.

On définit la tractrice d'une courbe plane ( $C$ ) comme la trajectoire d'un point  $P$ , susceptible de glisser avec frottement sur le plan de la courbe, sous la condition d'être maintenu à une distance invariable  $k$  d'un point  $M$  décrivant ( $C$ ).

La tractrice dépend donc, en général, de deux éléments arbitraires: la longueur du segment rectiligne  $k$  et l'orientation de ce segment pour une position donnée  $M_0$  de  $M$ .

La définition qui vient d'être donnée est équivalente à la suivante: la tractrice d'une courbe ( $C$ ) est une courbe ( $C'$ ) telle, qu'à chaque point  $P$  de ( $C'$ ) corresponde un point  $M$  de ( $C$ ), situé sur la tangente de ( $C'$ ) au point  $P$ , de manière que la longueur  $PM$  soit constante.

C'est cette deuxième définition dont on déduit généralement les propriétés géométriques des tractrices. Elle montre qu'une courbe quelconque est tractrice de toutes ses courbes équitangentielles; le problème des tractrices et celui des équitangentielles sont ainsi réciproques.

**2.** Désignons par  $\sigma$  l'arc de la courbe ( $C$ ), compté à partir d'une origine arbitraire  $M_0$  sur cette courbe; par  $r$ , le rayon de

courbure correspondant. Soient de même  $R$ ,  $s$  les coordonnées intrinsèques du point correspondant  $P$  de la tractrice ( $C'$ ). Soient encore  $M, M'$  deux positions infiniment voisines de  $M$ , se suivant dans le sens des arcs croissants:  $P, P'$ , les positions correspondantes de  $P$ ;  $d\tau$ , l'angle compris entre les droites  $MP$ ,  $M'P'$ ;  $\alpha$ , l'angle de  $MP$  avec la tangente à ( $C$ ) en  $M$ , compté dans un sens convenable. On a

$$ds = d\sigma \cos \alpha , \quad kd\tau = d\sigma \sin \alpha .$$

En tenant compte de la relation  $ds = Rd\tau$ , on déduit de ces formules les relations bien connues

$$d\sigma = \pm \left( 1 + \frac{k^2}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}} ds , \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k}{R} . \quad (2)$$

Dans la première, le signe ambigu du radical a été mis en évidence. La seconde exprime que le centre de courbure de la tractrice est l'intersection des normales aux points  $M$  et  $P$  qui se correspondent sur leurs courbes respectives.

Il en résulte que  $R$  s'annule en tous les points  $P$  où  $PM$  est normale à ( $C$ ), et devient infini en tous les points  $P$  où  $PM$  est tangente à ( $C$ ).

**3.** Si  $\alpha$ , au point  $M'$ , devient  $\alpha + d\alpha$ , et si nous appelons  $d\lambda$  l'angle de contingence de ( $C$ ) au point  $M$ , nous avons encore

$$d\lambda = d\tau + d\alpha , \quad d\sigma = rd\lambda ;$$

d'où, en tenant compte de (1) et de l'équation (2) différentiée,

$$\pm \frac{\sqrt{R^2 + k^2}}{r} = 1 - \frac{kR}{R^2 + k^2} \frac{dR}{ds} . \quad (3)$$

Pour obtenir l'équation intrinsèque de la tractrice, il faudra éliminer  $r$  et  $\sigma$  entre les équations (1), (3) et l'équation intrinsèque  $\sigma = f(r)$  de la courbe ( $C$ ). En général, on sera conduit ainsi à définir la tractrice par une équation différentielle du

second ordre. Nous verrons cependant que, comme dans le cas où l'on emploie les coordonnées cartésiennes ou polaires, les équations intrinsèques des tractrices de la ligne droite et du cercle s'obtiennent par l'intégration d'équations du premier ordre, se ramenant immédiatement aux quadratures.

L'équation différentielle qui définit les tractrices d'une courbe (C) peut admettre des intégrales singulières correspondant elles-mêmes à des tractrices; on peut appeler celles-ci des *tractrices singulières*.

**4.** Réciproquement, pour obtenir l'équation intrinsèque de la courbe équitangentielle de (C'), pour la valeur  $|k|$  du segment constant, on éliminera  $R$  et  $s$  entre les équations (1), (3) et l'équation intrinsèque  $R = \varphi(s)$  de (C'). Comme le segment  $|k|$  doit être porté sur la tangente, en deux sens opposés à partir du point de contact, il faut donner à  $k$  le double signe; on aura ainsi à éliminer  $s$  entre les équations

$$r = \frac{(\varphi^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi^2 + k^2 \pm k\varphi\varphi'} , \quad \sigma = \int \frac{\sqrt{\varphi^2 + k^2}}{\varphi} ds , \quad (4)$$

où l'on a posé  $\varphi' = \frac{d\varphi}{ds}$ .

L'équitangentielle ainsi déterminée peut, d'ailleurs, être décomposable en deux courbes distinctes.

**5.** Pour une valeur donnée de  $|k|$ , une courbe n'a qu'une équitangentielle, tandis qu'elle a une infinité de tractrices. L'équation de ces dernières peut changer suivant qu'on prend  $k$  avec l'un ou l'autre signe. Nous ferons à ce sujet la convention suivante, qui s'accorde avec la règle usuelle des signes. Au point initial  $M_0$ , pris sur la courbe de base, l'orientation de la droite sur laquelle sont portés les segments  $k$ ,  $-k$ , est définie par la valeur  $\alpha_0$  de l'angle  $\alpha$ , déterminé d'une manière univoque (n°s 1 et 2). Les segments opposés  $M_0 P_0$ ,  $M_0 Q_0$ , égaux à  $|k|$ , définissent deux points initiaux  $P_0$ ,  $Q_0$ , à partir desquels, lorsqu'un point  $M$  décrivant la courbe (C) passe en  $M_0$ , deux points  $P$ ,  $Q$  tracent chacun une branche de tractrice. Nous convenons de dire que les trajectoires de ces deux points forment une *tractrice complète*. Celle-ci peut être indécomposable ou non.

Au point de vue envisagé, la tractrice ordinaire de la ligne droite n'est pas une tractrice complète<sup>1</sup>.

La tractrice complète dépend donc des arbitraires  $|k|$  et  $\alpha_0$ , ce qui s'accorde avec sa définition par une équation différentielle du second ordre. L'angle  $\alpha_0$  varie de 0 à  $\pi$ .

**6. Développée de la tractrice.** — Désignons par  $R_1$ ,  $s_1$  les coordonnées intrinsèques des points de cette développée qui correspondent aux points  $R$ ,  $s$  de la tractrice; nous choisissons l'origine des arcs  $s$ , en un point de rebroussement de cette dernière courbe; des relations

$$s_1 = R, \quad R_1 d\tau = dR,$$

il suit immédiatement

$$R = s_1, \quad ds = \frac{s_1 ds_1}{R_1}; \quad (5)$$

par substitution dans l'équation de la tractrice, on aura l'équation de la développée.

On peut encore écrire, en partant de la courbe (C) et en utilisant les formules (1), (3), (5),

$$\sqrt{s_1^2 + k^2} \cdot ds_1 = R_1 d\sigma, \quad \frac{\sqrt{s_1^2 + k^2}}{r} = 1 - \frac{kR_1}{s_1^2 + k^2}. \quad (6)$$

**7. Application à la tractrice ordinaire.** — Dans ce cas, (C) a pour équation  $r = \infty$ ; la formule (3) donne

$$\frac{ds}{k} = \frac{R dR}{R^2 + k^2}.$$

En comptant les arcs à partir du point où  $R = 0$ , on obtient l'équation bien connue de la tractrice:

$$R^2 = k^2 \left( e^{\frac{2s}{k}} - 1 \right) = 2k^2 e^{\frac{s}{k}} \operatorname{sh} \frac{s}{k}.$$

<sup>1</sup> La tractrice complète de la droite, pour  $|k|$  arbitraire et  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ , se compose de deux tractrices ordinaires, symétriques par rapport à la droite de base; c'est peut-être ce qui a fait dire à SALMON (*Traité de géométrie analytique (courbes planes)*, trad. O. Chemin, Paris, 1884; p. 405) que la tractrice ordinaire doit être complétée par sa symétrique.

La deuxième formule (6), pour  $r = \infty$ , fournit l'équation de la développée:

$$R_1 = \frac{s^2}{k} + k ,$$

qui représente une chaînette.

Déterminons encore les équitangentialles de la tractrice

$$R^2 = a^2 \left( e^{\frac{2s}{a}} - 1 \right) .$$

En posant

$$\frac{a^2 - k^2}{a^2} = c^2 , \quad e^{\frac{2s}{a}} = \frac{t^2 - c^2}{t^2 - 1} ,$$

on trouve, au moyen des équations (4), la représentation paramétrique suivante:

$$r = \frac{ak^2}{a \mp k} \cdot \frac{t^3}{(a \pm k - at^2) \sqrt{t^2 - 1}} , \quad \sigma = \frac{a}{2} \log \frac{(t - c)^c (t + 1)}{(t + c)^c (t - 1)} .$$

Les courbes qu'elle définit sont toujours décomposables en deux syntractrices. Un cas remarquable correspond à  $k = a$ ; une branche est la droite asymptote, l'autre a pour équation intrinsèque

$$r = \frac{a}{2} \cosh \frac{\sigma}{a} ,$$

c'est une courbe bien connue.

**8. Application aux tractrices du cercle.** — Soit  $a$  le rayon du cercle donné. L'équation (3) devient, pour  $r = a$ ,

$$a \mp \sqrt{R^2 + k^2} = \frac{akR}{R^2 + k^2} \frac{dR}{ds} . \quad (7)$$

En excluant la solution

$$R = \pm \sqrt{a^2 - k^2} , \quad (8)$$

on peut séparer les variables et écrire

$$ds = \frac{akR dR}{(R^2 + k^2)(a \mp \sqrt{R^2 + k^2})} . \quad (9)$$

L'équation (8) est une intégrale singulière de (7); elle montre que, parmi les tractrices du cercle  $r = a$ , pour une valeur donnée de  $k$ , se trouve comme tractrice singulière un cercle de rayon  $\sqrt{a^2 - k^2}$ . Ce cercle est évidemment unique et concentrique au cercle donné; il est réel si  $|k| < a$ .

Dans l'équation (7), on peut toujours admettre que  $k$  est positif; car, dans l'hypothèse  $k < 0$ , il suffirait de compter les arcs en sens inverse pour être ramené à ce cas. D'autre part, l'équation étant du premier ordre, son intégrale générale dépend d'une seule constante arbitraire, qui sera fixée par le choix de l'origine des arcs; donc, lorsque  $k$  est donné, (9) définit une courbe unique pour chacun des signes attribués à  $\sqrt{R^2 + k^2}$ . En d'autres termes, les deux tractrices, celle qui répond au signe — comme celle correspondant au signe +, sont déterminées en forme et en grandeur par la valeur de  $k$ ; l'orientation, au point  $M_0$ , de la droite  $P_0 Q_0$  n'influe que sur leur position. Par conséquent, il y aura toujours au moins un point de ces courbes où la droite  $P M$  (ou la droite  $Q M$ ) passe par le centre du cercle de base, c'est-à-dire où  $R = 0$ . Nous compterons les arcs à partir d'un tel point.

On obtiendra aisément l'intégrale générale en posant dans l'équation (9)  $R^2 + k^2 = u^2$ ; il vient ainsi, avec la condition que  $s = 0$  donne  $u = k$ ,

$$R^2 = k^2 (\pm a - k) \frac{(\pm a + k) e^{\frac{2s}{k}} - 2k e^{\frac{s}{k}} - (\pm a - k)}{\left( \pm a - k + k e^{\frac{s}{k}} \right)^2}, \quad (10)$$

ou

$$R^2 = 4k^2 (\pm a - k) \frac{\left( \pm a \operatorname{ch} \frac{s}{2k} + k \operatorname{sh} \frac{s}{2k} \right) \operatorname{sh} \frac{s}{2k}}{\left[ (2k \mp a) \operatorname{sh} \frac{s}{2k} \pm a \operatorname{ch} \frac{s}{2k} \right]^2},$$

pour l'équation intrinsèque de la tractrice. Elle peut représenter deux courbes, à cause des doubles signes; les signes supérieurs, ainsi que les signes inférieurs, se correspondent.

On voit que  $R$  s'annule pour  $s = 0$  et pour  $s = k \log \frac{k \mp a}{k \pm a}$ . Ces dernières valeurs sont réelles si  $k > a$ ; elles mesurent la

longueur de l'arc compris entre deux points de rebroussement consécutifs. De même, on a  $R = \infty$  pour  $s = k \log \frac{k \mp a}{k}$ ; les points correspondants sont réels sur les tractrices qui correspondent à  $k > a$ , et sur une branche des tractrices qui correspondent à  $k < a$ . Enfin, lorsque  $s$  tend vers l'infini,  $R$  a pour limite  $\sqrt{a^2 - k^2}$ ; et l'on sait en effet que la tractrice pour  $k < a$  a une longueur infinie et possède un cercle asymptotique réel de rayon  $\sqrt{a^2 - k^2}$ , concentrique au cercle de base et asymptotique pour les deux branches de la tractrice complète; il coïncide d'ailleurs avec la tractrice singulière. Si  $k = a$ , ce cercle a un rayon nul; l'équation (10) donne d'une part  $R = 0$ , et de l'autre

$$R = \frac{2a\sqrt{\frac{s}{e^a - 1}}}{\frac{s}{e^a - 2}}; \quad (11)$$

c'est l'équation connue de la tractrice polaire (*tractrix compliata* de COTES). Dans ce cas, l'arc entre le point de rebroussement et un point d'inflexion mesure  $a \log 2$ .

Remarquons que la courbe (10), où l'on prend  $a$  avec le signe  $-$ , s'identifie avec celle où  $a$  est pris avec le signe  $+$ , si l'on remplace  $s$  par  $s - k \log \frac{k - a}{k + a}$ , ce qui revient à transporter l'origine des arcs du point de rebroussement primitivement choisi en un des points de rebroussement immédiatement voisins. En n'introduisant que des arcs réels, ce transport de l'origine n'est possible que pour les tractrices qui correspondent à  $k > a$ . Donc les deux courbes représentées par l'équation (10) sont congruentes si  $k > a$ ; elles ne le sont pas si  $k < a$ . En d'autres termes, il n'y a qu'une tractrice dans le premier cas; il existe deux tractrices différentes dans le second.

**9.** *La tractrice du cercle peut-elle être une courbe fermée?* — Puisque les tractrices, pour  $k < a$ , possèdent un cercle asymptotique, et ont, par conséquent, la forme de spirales à une infinité de spires, seules les tractrices qui correspondent à  $k > a$  pourront éventuellement se fermer sur elles-mêmes. On sait que ces courbes présentent deux séries de points de rebroussement, répartis sur deux cercles concentriques au cercle de base,

de rayons  $k + a$  et  $k - a$ . En s'appuyant sur d'évidentes raisons de symétrie, on s'assure que, en désignant par O le centre du cercle, et par A, B, C, trois rebroussements consécutifs sur la tractrice, la condition pour que cette courbe se ferme est que l'angle au centre A O C soit commensurable avec  $2\pi$ , ou, en d'autres termes, que l'angle A O B soit commensurable avec  $\pi$ . Or, si nous connaissons l'arc  $\sigma'$  du cercle qui correspond à l'arc  $s'$  de la tractrice, d'extrémités A, B, il est clair — vu que le segment  $k$  aux points A et B est normal au cercle, et passe ainsi par O — que l'angle AOB est congru à  $\frac{\sigma'}{a}$  suivant le module  $\pi$ . La tractrice sera donc fermée, si le rapport  $\frac{\sigma'}{a\pi}$  est commensurable, et cette condition est aussi suffisante.

Posant  $e^{\frac{s}{k}} = x$ , on a, par (10),

$$\sqrt{1 + \frac{k^2}{R^2}} = \pm \frac{ax}{\Delta},$$

avec

$$\Delta^2 = (\pm a - k) [(\pm a + k)x^2 - 2kx - (\pm a - k)].$$

Nous pouvons supposer que  $a$  est affecté du signe +; nous avons vu, en effet, (nº 8) que si  $a$  était précédé du signe —, on serait ramené au premier cas par un simple changement d'origine des arcs. L'équation (1) donne alors

$$d\sigma = ak \frac{dx}{\Delta}.$$

En fixant l'origine des arcs de manière qu'à  $s = 0$  corresponde  $\sigma = 0$ , et en nous rappelant que l'arc  $s'$  compris entre deux rebroussements consécutifs A, B vaut  $k \log \frac{k-a}{k+a}$ , l'intégration donne, pour l'arc correspondant du cercle de base,

$$\sigma' = \frac{(2p+1)ak\pi}{\sqrt{k^2 - a^2}},$$

$p$  étant un entier.

La condition de fermeture sera que le rapport positif

$$\frac{(2p+1)k}{\sqrt{k^2 - a^2}}$$

soit égal à un nombre commensurable. Représentons celui-ci par une fraction  $\frac{\lambda}{\mu}$ , que nous pouvons supposer réduite à sa plus simple expression. Il en résulte

$$\frac{a\lambda}{k} = \sqrt{\lambda^2 - (2p + 1)^2 \mu^2},$$

Comme nous pouvons donner à  $\mu$  des valeurs entières quelconques, nous obtiendrons toutes les tractrices envisagées en donnant à  $p$  une valeur fixe; en choisissant pour cette dernière la valeur zéro, il vient

$$\frac{a}{k} = \sqrt{1 - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2}. \quad (12)$$

Cette formule détermine le rapport des longueurs  $a$  et  $k$  qui définissent une tractrice fermée; elle montre que la fraction  $\frac{\lambda}{\mu}$  est au moins égale à 1.

Appelons *foliole* l'arc ABC de la tractrice, A et C étant deux points de rebroussement voisins sur le cercle de rayon  $k - a$ , et B le rebroussement intermédiaire situé sur le cercle de rayon  $k + a$ . La tractrice définie par la formule (12) est composée de  $\mu$  folioles, et l'on fera, pour la décrire,  $\lambda$  fois le tour du cercle de base. En effet, l'angle  $\omega$ , qui mesure l'arc de cercle décrit par le point M pendant que le point P décrit une foliole, est égal au double de  $\frac{\sigma'}{a}$  pris pour  $p = 0$ ; nous aurons donc

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\lambda}{\mu},$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

L'angle sous lequel la foliole est vue du centre du cercle de base est

$$2\pi \left( \frac{\lambda}{\mu} - 1 \right),$$

et l'angle sous lequel la tractrice entière est vue a la valeur

$$2\pi(\lambda - \mu).$$

**10.** Un cas particulier assez intéressant est celui des tractrices à une seule foliole, c'est-à-dire celles qui répondent à  $\mu = 1$ .

Ces courbes sont pyriformes et possèdent deux points de rebroussement alignés sur le centre du cercle; elles sont, pour  $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ , des tractrices complètes indécomposables. Celle pour laquelle  $\lambda = 2$  a la forme conventionnelle d'un cœur. A mesure que  $\lambda$  augmente, elles tendent vers la tractrice polaire.

**11.** Il y a lieu de distinguer les courbes fermées pour lesquelles  $k < 2a$ , de celles pour lesquelles  $k > 2a$ .

Si  $k < 2a$ , on a  $\lambda > \frac{2\mu}{\sqrt{3}}$ ; le minimum du nombre  $\mu$  est 1.

Il y a dans cette catégorie des tractrices à un nombre quelconque de folioles.

Si  $k > 2a$ , on a

$$1 < \frac{\lambda}{\mu} < \frac{2}{\sqrt{3}};$$

L'entier  $\mu$  minimum qui puisse satisfaire à cette condition est  $\mu = 7$ , ce qui signifie que cette classe ne comprend pas de tractrices à moins de sept folioles. Avec cette valeur de  $\mu$ , l'inégalité précédente exige  $\lambda = 8$ : on fait donc 8 fois le tour du cercle.

**12.** *Développées des tractrices du cercle.* — Les équations (5) et (9) donnent pour l'équation la développée,

$$R_1 = \frac{(s_1^2 + k^2)(a \pm \sqrt{s_1^2 + k^2})}{ak}.$$

Cette courbe se compose de deux branches, à cause du double signe du radical. Si  $\mu = 1$ , elle appartient aux lignes dites à  $\lambda$  ventres.

En particulier, la développée de la tractrice polaire est

$$R_1 = \frac{(s_1^2 + a^2)(a \pm \sqrt{s_1^2 + a^2})}{a^2}.$$

Cette ligne est bien connue; elle n'est autre que la spirale algébrique d'équation polaire  $\rho(\omega^2 - 1) = 2a$ .