Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 22 (1921-1922)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FAMILLES ADDITIVES ET FONCTIONS ADDITIVES D'ENSEMBLES ABSTRAITS

Autor: Fréchet, M.

Kapitel: II. — Construction de familles d'ensembles abstraits qui sont additives au sens restreint.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515731

familles distinctes construite comme les σ_0 (sauf qu'elle n'est pas assujettie à être dénombrable) et qui est telle que tous les σ_0 en sont des segments. Enfin les ensembles de tous les σ_0 forment une famille comprenant $\mathcal{H}$ et close par rapport aux opérations S, D, ... Par suite, la plus petite famille $\mathcal{H}_c$ est formée des ensembles appartenant à l'un quelconque des termes d'une certaine suite bien ordonnée Σ composée de familles distinctes dont chacune s'obtient en appliquant l'opération U à la famille composée des ensembles des familles précédentes. La décomposition précédente de $\mathcal{H}_c$ permet maintenant de classer les ensembles qui composent cette famille par ordre de complication croissante.

En effet, chacun de ces ensembles, E, appartient aux familles successives de Σ à partir d'un certain rang. C'est ce rang qui fixe le degré de complexité de la construction de E à partir de $\mathcal{H}$. Il faut d'ailleurs distinguer cette complexité de la complexité de l'ensemble E lui-même. Si la famille $\mathcal{H}$ est formée d'ensembles très compliqués, il pourra arriver qu'un ensemble E de classe très élevée soit beaucoup plus simple que les ensembles de H. Mais si au contraire les ensembles de $\mathcal{H}$ sont tous simples, on pourra juger légitimement de la complexité intrinsèque d'un ensemble E de $\mathcal{H}_c$ par le rang du terme de la suite Σ où il apparaît pour la première fois.

Nous remarquerons enfin que dans le cas où les opérations données, S, D, ... ne portent à chaque fois que sur un nombre fini d'ensembles, la suite Σ si elle n'est pas finie est formée d'une suite de familles de rangs finis, de sorte que dans ce cas les classes des ensembles de $\mathcal{H}_c$ déduits de $\mathcal{H}$ sont toutes repérables par des nombres entiers.

II. — Construction de familles d'ensembles abstraits qui sont additives au sens restreint.

Une famille $\mathcal{F}$ d'ensembles quelconque est dite *additive au sens restreint*, si E_1, E_2 étant deux quelconques des ensembles de la famille $\mathcal{F}$, les ensembles $E_1 + E_2$, $E_1 - E_2$ appartiennent aussi à la famille $\mathcal{F}$.

On peut alors dire que la famille $\mathcal{F}$ est *close par rapport aux opérations* d'addition et de soustraction de deux ensembles et appliquer à ces opérations particulières les considérations que l'auteur a développées plus haut concernant celles des opérations les plus générales qui ne portent à chaque fois que sur un nombre fini d'ensembles.

Il s'agit, étant donnée une famille $\mathcal{H}$, entièrement arbitraire, d'ensembles quelconques, de déterminer une famille comprenant les ensembles de $\mathcal{H}$ et close par rapport aux opérations d'addition et de soustraction de deux ensembles.

D'après ce qui précède, on peut construire la plus petite, $\mathcal{H}_r$, de ces familles de la façon suivante: on formera $\mathcal{H}_r$ au moyen de tous les ensembles obtenus chacun comme résultat final d'un nombre fini d'additions et de soustractions de deux ensembles, ces opérations ayant lieu successivement et portant à chaque fois sur des ensembles appartenant soit à $\mathcal{H}$ soit aux ensembles formés dans les opérations antérieures.

D'après le premier mode de construction indiqué, chaque ensemble E de $\mathcal{H}_r$ s'obtient par un nombre fini d'additions et de soustractions qui sont bien effectués à partir de la famille $\mathcal{H}$, mais qui évidemment ne font intervenir, pour un ensemble E déterminé de $\mathcal{H}_r$, qu'un nombre fini d'ensembles de $\mathcal{H}$: G_1, G_2, ... G_n. Soit $((G_1, \ldots G_n))$ la plus petite famille additive au sens restreint qui comprend les ensembles G_1, ... G_n de $\mathcal{H}$; on voit qu'elle comprend E et est comprise dans $\mathcal{H}_r$. Donc:

$$\mathcal{H}_r = \mathcal{H} + \mathcal{H}^{(2)} + \ldots + \mathcal{H}^{(n)} + \ldots$$

$\mathcal{H}^{(n)}$ étant la famille composée des ensembles appartenant à l'une quelconque des familles $((G_1, \ldots G_n))$ pour n donné.

On est donc ainsi ramené au cas particulier où $\mathcal{H}$ est composé d'un nombre fini d'ensembles, puisque si l'on sait construire les familles $((G_1, \ldots G_n))$, on saura construire $\mathcal{H}_r$.

Or si les ensembles G_1, ... G_n étaient *disjoints*, c'est-à-dire sans élément commun à deux d'entre eux, la famille $((G_1, \ldots G_n))$ serait évidemment constituée des ensembles qui sont chacun somme d'un nombre fini des G_1, ... G_n. Pour ramener à ce cas il suffit d'introduire la considération de ce que nous appellerons les atomes du système $G_1, \ldots G_n$. Dans la suite d'additions et de soustractions à partir des $G_1 \ldots G_n$, qui sert à former un ensemble quelconque de $((G_1, \ldots G_n))$, les ensembles obtenus successivement resteront formés d'éléments des G, par conséquent tout ensemble de $((G_1, \ldots, G_n))$ appartient à $G = G_1 + \ldots + G_n$. En posant $G'_1 = G - G_1, \ldots G'_n = G - G_n$, on voit que les égalités

$$G = G_1 + G'_1, \ldots G = G_n + G'_n$$

représentent ce que l'on peut appeler des découpages de G. Si on combine à la fois tous ces découpages, on divise G en 2^n sous-ensembles au plus — certains pouvant être nuls —, ensembles disjoints deux à deux et que nous appellerons les *atomes* du système $G_1, \ldots G_n$.

On voit facilement que chaque atome s'obtient à partir de ce système par une suite convenable de *soustractions* seulement. Finalement, on voit qu'il existe un nombre fini d'ensembles — les atomes — déduits de $G_1 \ldots G_n$ chacun par une certaine suite convenable de soustractions et tels que $G_1, \ldots G_n$ soient chacun somme d'un nombre fini d'atomes disjoints.

Alors il est manifeste que les atomes appartiennent à la famille $((G_1, \ldots G_n))$ et que cette famille est constituée des ensembles qui sont sommes d'un nombre fini d'atomes disjoints.

On peut aussi en déduire une autre construction de la famille $\mathcal{H}_r$ dans le cas d'une famille $\mathcal{H}$ quelconque. Appelons système moléculaire attaché à $\mathcal{H}$, le système $\mathcal{M}$ formé des ensembles qui sont atomes pour l'un au moins des groupements formés d'un nombre fini d'ensembles de $\mathcal{H}$.

On voit alors que la famille $\mathcal{H}_r$ sera constituée des ensembles qui sont sommes d'un nombre fini de molécules disjointes. Ceci montre en passant que dans la construction d'un ensemble quelconque de $\mathcal{H}_r$ par un nombre fini d'additions et de soustractions à partir de $\mathcal{H}$, on peut toujours supposer que les soustractions ont toutes été placées en tête. Ceci montre aussi que pour former la plus petite famille $\mathcal{H}_r$ additive au sens restreint et comprenant $\mathcal{H}$, on peut former d'abord la plus petite famille comprenant $\mathcal{H}$ et close par rapport à la soustraction et ensuite obtenir $\mathcal{H}_r$ comme la plus petite famille close par rapport à l'addition de deux ensembles et comprenant la famille qu'on vient de former.

Il pourra aussi être utile de remarquer que si une famille d'ensembles, $\mathcal{H}$, est telle que la différence de deux de ses ensembles est la somme d'un nombre fini d'ensembles disjoints appartenant à $\mathcal{H}$, la famille $\mathcal{H}_r$ est constituée par tous les ensembles qui sont sommes d'un nombre fini d'ensembles disjoint appartenant à $\mathcal{H}$. (On est conduit à envisager le cas actuellement considéré si l'on remarque que le système moléculaire attaché à une famille quelconque jouit lui-même de cette propriété.)

En vue de mesurer le degré de complexité de chacun des ensembles de $\mathcal{H}_r$, on commencera par appeler $U\mathcal{H}$ l'opération qui consiste à adjoindre à une famille $\mathcal{H}$ les ensembles qui sont différences de deux ensembles de $\mathcal{H}$, puis à adjoindre à la famille ainsi formée les ensembles qui sont sommes de deux des ensembles de cette seconde famille.

Ceci fait, on formera les familles

$$\mathcal{H}, \quad U\mathcal{H}, \quad U(U\mathcal{H}), \ldots$$

et en général la famille qu'on peut désigner par $U^{(n)}\mathcal{H}$ et qui résulte de l'opération U réitérée n fois à partir de $\mathcal{H}$. Alors: ou bien à partir d'un certain rang p les $U^{(n)}\mathcal{H}$ sont identiques à $U^{(p)}\mathcal{H}$ et $U^{(p)}\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_r$; ou dans le cas contraire $\mathcal{H}_r$ est formé des ensembles appartenant à l'une quelconque des familles $U^{(n)}\mathcal{H}$; autrement dit

$$\mathcal{H}_r = \mathcal{H} + U\mathcal{H} + \ldots + U^{(n)}\mathcal{H} + \ldots .$$

On voit alors qu'on pourra distinguer dans $\mathcal{H}_r$ des ensembles de classe 0, 1, 2, ..., n, ... , la classe étant toujours déterminée par un rang entier. Bien entendu, il pourra arriver que le nombre des classes soit fini si les $U^{(n)}\mathcal{H}$ sont identiques à partir d'un certain rang.

III. — Construction des familles d'ensembles abstraits qui sont additives au sens complet.

1. *Définitions.* — Appelons *ensemble limite restreint* d'une suite infinie d'ensembles E_1, E_2, ... E_n ... l'ensemble R des