

# I. — Construction de familles d'ensembles abstraits qui sont closes par rapport à certaines opérations.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# FAMILLES ADDITIVES ET FONCTIONS ADDITIVES D'ENSEMBLES ABSTRAITS

PAR

M. FRÉCHET (Strasbourg).

## SOMMAIRE :

*Première partie.* — I. Construction de familles d'ensembles abstraits qui sont closes par rapport à certaines opérations. — II. Construction de familles d'ensembles abstraits qui sont additives au sens restreint. — III. Idem au sens complet.

*Seconde partie.* — IV. Fonctions additives d'ensembles abstraits <sup>1</sup>.

### I. — Construction de familles d'ensembles abstraits qui sont closes par rapport à certaines opérations.

L'addition, la soustraction de deux ensembles sont des exemples particuliers d'opérations qui font correspondre à certains ensembles ou groupements d'ensembles des ensembles déterminés. On peut dire qu'une famille  $\mathcal{F}$  d'ensembles est *close par rapport aux opérations*  $S, D, \dots$  si chacune de ces opérations, effectuée uniquement sur des ensembles appartenant à la famille  $\mathcal{F}$  ne peut fournir que des ensembles appartenant à  $\mathcal{F}$ . On peut alors se proposer de construire une famille  $\mathcal{F}$  close par rapport à certaines opérations  $S, D, \dots$  connaissant certains ensembles appartenant à  $\mathcal{F}$ . Ou même, plus généralement, étant donnée une famille arbitraire  $\mathcal{A}$  composée d'ensembles également arbitraires, on peut chercher s'il existe une famille  $\mathcal{F}$  comprenant tous les ensembles de  $\mathcal{A}$  et close par rapport aux opérations  $S, D, \dots$ . Nous distinguerons deux cas qui ne sont pas

---

<sup>1</sup> Le présent article est le résumé de deux communications présentées en janvier 1922 au Colloque mathématique de Zurich et au Séminaire mathématique de Berne, par M. Maurice FRÉCHET, Directeur de l'Institut mathématique de l'Université de Strasbourg.

tous les cas possibles, mais qui sont les plus simples et les plus importants :

1<sup>o</sup> Supposons que les opérations  $S, D, \dots$  ne soient applicables (ou qu'on aie convenu de ne les appliquer) qu'à des groupements formés d'un nombre *fini* d'ensembles. Appelons suite déduite de la famille  $\mathcal{C}$ , toute suite ordonnée composée d'un nombre fini d'ensembles dont chacun,  $G$ , appartient à  $\mathcal{C}$  ou résulte de l'une des opérations  $S, D, \dots$  effectuée sur les ensembles qui précèdent  $G$  dans cette suite.

Appelons maintenant  $\mathcal{C}_r$  la famille constituée de tous les ensembles appartenant à l'une quelconque des suites déduites de  $\mathcal{C}$ ; la famille  $\mathcal{C}_r$  comprend évidemment la famille  $\mathcal{C}$  et est close par rapport à  $S, D, \dots$ ; d'autre part elle appartient à toute famille comprenant  $\mathcal{C}$  et close par rapport aux opérations  $S, D, \dots$ . Nous savons donc construire non seulement une solution du problème, mais même « la plus petite famille » comprenant  $\mathcal{C}$  et close par rapport aux opérations  $S, D, \dots$ .

2<sup>o</sup> Supposons que les opérations  $S, D, \dots$  ne sont applicables (ou qu'on convienne de ne les appliquer) qu'à (un nombre fini ou) un groupement *dénombrable* d'ensembles. Alors on saura, comme précédemment, former « la plus petite famille » comprenant une famille arbitraire donnée  $\mathcal{C}$  et close par rapport aux opérations  $S, D, \dots$  (On pourra l'appeler  $\mathcal{C}_c$ ). On opérera comme plus haut, mais cette fois les suites considérées pourront comprendre des suites *bien* ordonnées dénombrables, (*finies ou non*).

Ainsi chaque ensemble appartenant à  $\mathcal{C}_r$  (ou à  $\mathcal{C}_c$ ) pourra être considéré comme le dernier terme d'une suite bien ordonnée finie (ou dénombrable) d'ensembles formés à partir des ensembles de la famille arbitraire donnée  $\mathcal{C}$  par des applications répétées, mieux, réitérées, des opérations  $S, D, \dots$  dans un ordre quelconque.

*Distinction des classes d'ensembles.* — On peut si l'on veut repérer le degré de complexité de la construction de chaque ensemble de  $\mathcal{C}_r$  ou de  $\mathcal{C}_c$  (qui d'ailleurs peut être obtenu parfois par différentes suites d'opérations) de la manière suivante.

Supposons qu'on puisse disposer les opérations  $S, D, \dots$ , considérées en elles-mêmes, en une suite bien ordonnée  $T$ . (C'est par

exemple ce qui aura lieu si ces opérations sont en nombre fini, seul cas utilisé par la suite). En permutant au besoin ces opérations, on peut appeler précisément S, D, ... ces opérations dans l'ordre où elles se présentent. Considérons alors la suite bien ordonnée  $T'$ , semblable à la suite  $T$ ,

$$\mathcal{K}, S\mathcal{K}, D(S\mathcal{K}), \dots$$

où chaque terme est une famille  $\mathcal{L}^p$  d'ensembles composée des ensembles appartenant aux familles précédentes et de ceux obtenus en appliquant à tout groupement de ceux-ci (quand cela est possible) l'opération de même rang que  $\mathcal{L}^p$  dans  $T$ . Soit enfin  $U\mathcal{K}$  la famille des ensembles appartenant à l'un quelconque des termes de cette suite  $T'$ . Il est évident que  $U\mathcal{K}$  comprend  $\mathcal{K}$ .

La plus petite famille  $\mathcal{K}_c$  comprenant  $\mathcal{K}$  et close par rapport aux opérations S, D, ... comprend évidemment  $U\mathcal{K}$ , si  $\mathcal{K}$  appartient à  $\mathcal{K}_c$ . De plus la condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille  $\mathcal{M}$  soit close par rapport à S, D, ... est que  $U\mathcal{M} = \mathcal{M}$ .

Finalement  $\mathcal{K}_c$  contiendra les familles qui sont les termes d'une suite bien ordonnée dénombrable  $\sigma$ , chacun,  $\mathcal{K}$ , résultant de l'opération U effectuée sur la famille constituée par les ensembles appartenant à l'un des termes de  $\sigma$  précédant  $\mathcal{K}$ .

Remarquons que si deux termes quelconques d'une des suites  $\sigma$  sont identiques, tous les termes de cette suite sont identiques à partir d'un certain rang. On peut donc remplacer dans ce qui précède, les suites  $\sigma$  par les suites  $\sigma_0$  qui sont chacune formée en supprimant, s'il y a lieu, d'une suite  $\sigma_0$  tous les termes identiques à un des termes le précédant.

Ceci étant, chaque suite  $\sigma_0$  est une suite bien ordonnée dénombrable de familles distinctes, chacune comprenant les précédentes (et comprenant en particulier la première qui est toujours  $\mathcal{K}$ ). Alors si deux suites bien ordonnées  $\sigma_0$  sont distinctes, l'une est identique à un « segment » de l'autre, c'est-à-dire est formée des mêmes termes et dans le même ordre que la suite des termes de la seconde précédant un certain terme de cette seconde suite.

Ceci suffit pour établir — sans avoir à parler de nombres transfinis, — qu'il existe une suite bien ordonnée  $\Sigma$  formée de

familles distinctes construite comme les  $\sigma_0$  (sauf qu'elle n'est pas assujettie à être dénombrable) et qui est telle que tous les  $\sigma_0$  en sont des segments. Enfin les ensembles de tous les  $\sigma_0$  forment une famille comprenant  $\mathcal{H}$  et close par rapport aux opérations S, D, ... Par suite, la plus petite famille  $\mathcal{H}_c$  est formée des ensembles appartenant à l'un quelconque des termes d'une certaine suite bien ordonnée  $\Sigma$  composée de familles distinctes dont chacune s'obtient en appliquant l'opération U à la famille composée des ensembles des familles précédentes. La décomposition précédente de  $\mathcal{H}_c$  permet maintenant de classer les ensembles qui composent cette famille par ordre de complication croissante.

En effet, chacun de ces ensembles, E, appartient aux familles successives de  $\Sigma$  à partir d'un certain rang. C'est ce rang qui fixe le degré de complexité de la construction de E à partir de  $\mathcal{H}$ . Il faut d'ailleurs distinguer cette complexité de la complexité de l'ensemble E lui-même. Si la famille  $\mathcal{H}$  est formée d'ensembles très compliqués, il pourra arriver qu'un ensemble E de classe très élevée soit beaucoup plus simple que les ensembles de  $\mathcal{H}$ . Mais si au contraire les ensembles de  $\mathcal{H}$  sont tous simples, on pourra juger légitimement de la complexité intrinsèque d'un ensemble E de  $\mathcal{H}_c$  par le rang du terme de la suite  $\Sigma$  où il apparaît pour la première fois.

Nous remarquerons enfin que dans le cas où les opérations données, S, D, ... ne portent à chaque fois que sur un nombre fini d'ensembles, la suite  $\Sigma$  si elle n'est pas finie est formée d'une suite de familles de rangs finis, de sorte que dans ce cas les classes des ensembles de  $\mathcal{H}_c$  déduits de  $\mathcal{H}$  sont toutes repérables par des nombres entiers.

## II. — Construction de familles d'ensembles abstraits qui sont additives au sens restreint.

Une famille  $\mathcal{F}$  d'ensembles quelconque est dite *additive au sens restreint*, si  $E_1, E_2$  étant deux quelconques des ensembles de la famille  $\mathcal{F}$ , les ensembles  $E_1 + E_2, E_1 - E_2$  appartiennent aussi à la famille  $\mathcal{F}$ .