Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 22 (1921-1922)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: Société mathématique suisse.

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 25.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

14.— M. A. Gérardin. — *Histoire des Sciences, un ancêtre de la presse mathématique française :* « Le Géomètre ». — Ce recueil, à l'usage des candidats aux écoles spéciales, était édité en 1836 à Paris par Guillard. L'exemplaire, cartonné, contient quatorze feuilles 13 × 21 et 9 planches. Gerono, Sturm, Miquel, Catalan, Terquem, Chasles... s'y sont intéressés. On y trouve des mémoires, des questions et réponses, la solution de certains concours généraux, et des problèmes résolus ignorés des mathématiciens et géomètres modernes.

15.— M. A. Gérardin expose divers *Procédés et problèmes de calcul mental*, avec applications à des problèmes des 2e, 3e, et 4e degrés. — Partant d'*une* solution *rationnelle* de $ax^2 + bx + c = y^2$, l'auteur apprend à trouver *toutes* les solutions *entières*.

La juxtaposition de ses méthodes fournit une solution élégante de la question.

16. — M. Tripier. — *Mouvement d'une surface invariable.* — Détermination graphique de la caractéristique.

17. — M. le Cdt Litré. — *Principes de la rotation des fluides.*

18. — M. Cadenat.— *Sur des formes se reproduisant par la multiplication.*

Ainsi :

$$(a^2 + ab + b^2)(c^2 + cd + d^2) = e^2 + ef + f^2$$

avec

$$e = ac + d(a + b) \ , \qquad f = bc - ad \ ;$$

ou encore

$$e = ad + b(c + d) \qquad f = ac - bd \ .$$

Le prochain Congrès se tiendra à *Montpellier*. Le président des Sections I et II sera M. E. Fabry, et le secrétaire M. A. Gérardin.

Société mathématique suisse.

Réunion de Bâle, 8 mai 1921.

Les mathématiciens suisses ont tenu leur réunion de printemps à Bâle, le 8 mai 1921, sous la présidence de M. L. Crelier, professeur à l'Université de Berne. Donnant suite à un vœu qui avait été émis en septembre 1920, à l'occasion du Congrès de Strasbourg, le Comité avait invité les mathématiciens de Strasbourg à prendre part à la réunion.

L'ordre du jour comprenait deux conférences, l'une de M. Fréchet, Directeur de l'Institut de mathématiques de l'Université de Stras-

bourg, l'autre de M. Gustave DUMAS, professeur à l'Université de Lausanne, puis une série de courtes communications.

CONFÉRENCES.

1. — *Conférence* de M. Maurice FRÉCHET (Strasbourg). — *Sur la désaxiomatisation de la Science.* — L'auteur rappelle d'abord qu'ayant fondé sur la méthode axiomatique la plupart de ses propres travaux, il ne saurait être suspecté de vouloir diminuer l'importance de cette méthode.

Mais il estime qu'il serait dangereux de lui assigner un rôle exclusif. Bien souvent cette méthode substitue à un concept d'ordre concret un concept abstrait sur lequel on peut édifier des raisonnements rigoureux; mais il arrive trop souvent qu'on en applique les conséquences à la réalité concrète en substituant sans s'en apercevoir le concept concret qui était le but de l'étude au concept abstrait, base unique de ces déductions logiques. L'auteur cite quelques exemples: la définition usuelle de la tangente impossible à réaliser graphiquement, la définition de la différentielle totale exacte qu'on abandonne tacitement après l'avoir énoncée, etc... Il y aurait lieu d'introduire des définitions où intervient l'ordre d'approximation admis pour l'élément à définir. Par exemple,à titre d'indication, la dérivée moyenne dans un intervalle de longueur ε remplacerait la dérivée exacte, la valeur de ε étant trois ou quatre fois supérieure à l'épaisseur concrète de la courbe, etc.

2. — *Conférence* de M. Gustave DUMAS (Lausanne). — *Tableaux de Poincaré et propriétés topologiques des surfaces.* — Poincaré, dans ses recherches mémorables d'Analysis Situs, a fait usage de tableaux permettant de caractériser, au point de vue topologique les variétés d'un nombre quelconque de dimensions.

M. Gustave Dumas, dans une large esquisse, montre, à grands traits, comment ces tableaux facilitent l'étude des propriétés des surfaces bilatérales ou unilatérales de l'espace à trois dimensions et comment le nombre permet de retrouver, d'une manière rigoureuse, tous les résultats que l'on doit à l'intuition géométrique.

La méthode, dans son essence, fait correspondre à des polyèdres, tracés sur les surfaces, certaines formes bilinéaires.

Les polyèdres sont orientés de la manière indiquée par MM. Veblen et Alexander, lesquels ont introduit encore, à propos des formes ci-dessus, des systèmes d'équations linéaires [1].

Les solutions de ces systèmes fournissent un moyen avantageux de représenter les contours fermés. On est ainsi conduit directement

[1] O. VEBLEN and J.-W. ALEXANDER, Manifolds of N dimensions. *Annals of Mathematics*, 2me série, t. 14, p. 163, 1912-13.

à la notion d'*homologie* que Poincaré a introduite et dont la place est prédominante dans ses travaux[1].

La première formule d'Euler acquiert de son côté une interprétation facile [2], tandis que, d'un autre, on se trouve en possession d'un procédé commode donnant les contours d'encadrement [3].

Les questions d'homéomorphie, enfin, se greffent sans grande difficulté sur ceci [4].

On sait, ce qu'en esprit de finesse, les plus illustres, les Riemann, les Jordan, les Möbius et, combien d'autres, ont dépensé d'ingéniosité dans l'exploration de ce domaine si riche et si attrayant de l'Analysis Situs, dernière citadelle, selon quelques-uns, de l'esprit de finesse.

Leurs efforts n'ont point été vains ; mais, dans ce champ aussi, grâce au génie si varié et si illimité de Poincaré, l'on verra peu à peu les tendances des Weierstrass et des Kronecker prédominer. Tant il est vrai, comme souvent on l'a dit, que, si les nombres ne gouvernent point le monde, ce sont eux néanmoins qui nous enseignent comment le monde est gouverné.

COMMUNICATIONS.

1. — M. G. VALIRON (Strasbourg). — *Sur les fonctions entières.* — Soit $f(z)$ une fonction entière d'ordre fini non entier ρ ; l'exposant de convergence de la suite des zéros est égal à ρ. Soit r_n le module du $n^{\text{ième}}$ zéro, je dirai que la fonction est de *première classe* si la série

$$\sum \frac{1}{r_n^{\rho}} \tag{1}$$

converge, dans le cas contraire qu'elle est de *deuxième classe.* En m'appuyant sur une généralisation simple de l'inégalité de M. Jensen, j'ai établi que, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction soit de première classe est que l'intégrale

$$\int_{\alpha}^{r} \frac{\log M(x)}{x^{\rho+1}}\, dx \tag{2}$$

dans laquelle $M(x)$ désigne le maximum de $|f(z)|$ pour $|z| = x$, converge. Si l'on désigne par R_n le rapport rectifié du coefficient de rang n au

---

[1] Gustave DUMAS et Jules CHUARD, Sur les homologies de Poincaré. *Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, t. 171, p. 1113, 1920.

Voir aussi la thèse « *Questions d'Analysis Situs* » présentée à l'Université de Lausanne par M. J. CHUARD.

Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, t. 46.

[2] Voir à ce propos : O. VEBLEN, An application of modular equations in Analysis Situs. *Annals of Mathematics*, 2e Série, t. 14, p. 86, 1912-13.

[3] Gustave DUMAS, Sur les contours d'encadrement. *Comptes rendus de l'Ac. des Sc.*, t. 172, p. 1221, 1921.

[4] Gustave DUMAS, Sur un tableau normal relatif aux surfaces unilatérales. *Comptes rendus* de l'Ac. des Sc., t. 174, p. 93, 1922.

coefficient de rang $n-1$ dans le développement de Taylor de $f(z)$, on déduit de la proposition précédente que la série (1) converge ou diverge en même temps que la série

$$\sum \frac{1}{R_n^{\rho}} \tag{3}$$

Dans le cas de l'ordre ρ entier, la convergence de (3) entraîne que le genre est $\rho - 1$. Il résulte de là que la classe se conserve par la dérivation, que les fonctions $f(z) - x$ sont toutes de même classe; de même ces opérations conservent le genre dans le cas de l'ordre entier lorsque (3) converge.

Comme application on voit que si l'on pose

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

et si l'on suppose que la série

$$\sum \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|^k$$

converge, ou bien l'ordre de $f(z)$ est moindre que k, ou bien l'ordre est k et la fonction de la première classe et si k est entier le genre est $k-1$ au plus (Voir la communication de M. Polya à la dernière réunion de la Société, Neuchâtel, août 1920. *L'Ens. Math.*, t. XXI, p. 217).

2. — M. R. Fueter (Zurich). — *Le critère de Kummer relatif au dernier théorème de Fermat.* — Afin de pouvoir appliquer les méthodes de la théorie moderne des nombres à l'étude de l'équation de Fermat

$$a^l + b^l + c^l = 0 \qquad (l \text{ nombre premier impair}), \tag{1}$$

il faut d'abord remplacer la *forme additive* de l'énoncé de Fermat par une *forme multiplicative*. Des transformations simples permettent de ramener l'expression (1) à

$$(a + bh)^{r_0}(a + bh^r)^{r_1} \dots (a + bh^{r^{l-2}})^{r_{l-2}} = h^{\rho}\psi^l \tag{2}$$

où $h = e^{\frac{2\pi i}{l}}$, r étant une racine primitive (mod. l) et r_i le plus petit reste positif de r^i. ψ est un nombre du corps $k(h)$ et ρ un nombre déterminé par $\rho \equiv -\frac{b}{a+b}$ (mod l).

La formule (2) est valable pour c premier avec l. Elle fournit immédiatement les critères de Wieferich et de Furtwaengler. On peut aussi en déduire facilement les conditions de Kummer et de Mirimanoff.

3. — M. Alex. VÉRONNET (Strasbourg). — *Variation de la masse et de la distance d'une planète dans un milieu résistant.* — On suppose que l'atmosphère de la planète absorbe toutes les particules rencontrées. Alors sa distance au centre d'attraction varie en raison inverse du carré de sa masse: $m^2 r =$ const. L'équation du mouvement et l'équation de la trajectoire se déterminent facilement quand on se donne la loi de variation de la densité du milieu. De deux planètes, celle dont la valeur de $m^2 r$ est la plus faible se rapproche le plus vite du soleil. Le calcul montre que, quelque soit la loi de densité, les planètes n'ont pas pu se former à des distances très différentes des distances actuelles sans se rencontrer.

4. — M. A. SPEISER (Zurich). — *Sur la décomposition des nombres premiers dans les corps algébriques.* — Etant donnée une équation à coefficients entiers

$$x^n = a_1 x^{n-1} + \dots + a_n ,$$

on peut former avec les nombres a_n, a_{n-1}, ... , a_1 une série récurrente en commençant par n nombres entiers quelconques, par exemple par 0, ... ,0, 1. En réduisant les termes de cette série par un nombre premier p qui ne divise pas a_n, on reçoit une série périodique. Soit u le nombre de termes dans la période et soit f le plus petit nombre satisfaisant à l'équation $p^f \equiv 1 \pmod{u}$, on démontre que f est le degré des idéaux premiers divisant p dans le corps algébrique formé par les racines de l'équation proposée.

5. — M. Maurice FRÉCHET (Strasbourg). — *Sur divers modes de convergence.* — Les ensembles de fonctions où la limite d'une suite est définie au moyen d'une définition particulière de la convergence donnent lieu à une extension plus ou moins complète des propriétés des ensembles linéaires suivant que la définition adoptée pour la convergence peut ou non s'énoncer au moyen d'un écart de deux fonctions.

La convergence uniforme, la convergence en moyenne de Fischer, la convergence en mesure de F. Riesz convenablement généralisée, la convergence relativement uniforme de E. H. Moore peuvent être définies par l'intermédiaire de définitions, convenant à chaque cas, de la distance de deux fonctions.

Dans un mémoire sous presse [1], l'auteur a montré qu'au contraire la convergence ordinaire, la convergence quasi-uniforme d'Arzelà, la convergence presque partout de Lebesgue ne peuvent être définies par l'intermédiaire d'une définition de l'écart, quelle qu'elle soit.

---

[1] *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, 1921.

6. — M. L. Crelier (Berne). — *Sur la puissance de la droite*[1]. — La puissance d'une droite par rapport à un cercle que nous avons définie par l'expression

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha'_s}{2}=\frac{r+d}{r-d}$$

peut être établie également sans difficultés par la géométrie synthétique, en considérant la puissance d'une involution circulaire de points et en passant à celle de l'involution circulaire des tangentes correspondantes. La puissance de l'involution est alors égale à la puissance de l'axe de l'involution par rapport au cercle considéré.

En outre tous les théorèmes et toutes les constructions déduits de la puissance d'un point par rapport à un cercle correspondent à des théorèmes et des constructions analogues déduits de la puissance d'une droite.

Enfin la notion de puissance se laisse parfaitement étendre à la sphère. Nous aurons la puissance d'un point et la puissance d'un plan par rapport à une sphère avec des propriétés analogues aux précédentes.

Les propriétés involutives déduites de la théorie de la puissance du point ou de la droite se retrouvent également dans la puissance du point ou du plan par rapport à une sphère.

7. — M. L. Kollros (Zurich). — *Invariants orthogonaux de l'espace à* n *dimensions.* — La généralisation, dans l'espace à n dimensions, des notions de distance, d'angle et de courbure conduit aux résultats suivants:

1. En géométrie euclidienne, deux espaces linéaires ε_k et ε_l n'ayant aucun point commun (dans le fini et à l'infini) ont *une seule perpendiculaire commune*; il y en a plusieurs en géométrie non euclidienne.

2. Si ε_k et ε_l $(k+l\leqq n)$ ont un seul point commun, le nombre de leurs angles φ est le plus petit des 4 nombres $k, l, n-k, n-l$. Ce résultat, démontré par Jordan (*Bull. soc. math.*, t. III) avait été trouvé (22 ans auparavant) par Schläfli dans un mémoire: *Theorie der vielfachen Kontinuität* qui n'a été publié qu'en 1901. Schläfli appelle facteur de projection d'un espace sur l'autre le produit des cosinus de ces angles et le travail de Jordan permet de trouver l'équation qui détermine ces cosinus. La forme de cette équation ne montre pas immédiatement que *ces angles* φ *sont réels*, quand les espaces ε_k et ε_l le sont. Or, en prenant un des espaces donnés comme espace de coordonnées, on trouve pour $tg^2\varphi$ une équation séculaire; toutes les racines sont donc réelles et, de plus, positives, car $\operatorname{tg}^2\varphi$ s'exprime, d'ailleurs, par

[1] *Enseignement mathématique*, N° 1-2, XIXe année, janvier-mars 1917.
Nouvelles Annales de Mathématiques, 4e série, t. XVII, août et septembre 1917.

le quotient de 2 formes quadratiques définies et positives. Les côtés $(m_1, n_1) \dots (m_i, n_i)$ de ces angles sont tels que chaque m_i ou n_i est perpendiculaire à tous les m_h et n_h (où $h \neq i$). Si l'on considère les éléments à l'infini de nos espaces, on déduit du résultat précédent un théorème de géométrie non euclidienne, car l'ε_{n-1} à l'infini d'un ε_n euclidien est un espace de Riemann. Pour $n = 4$, on retrouve cette proposition connue [1]: 2 droites gauches d'un espace de Riemann à 3 dimensions ont 2 perpendiculaires communes, *toujours réelles*, l'une AA_1 correspond à un minimum de la distance, l'autre BB_1 à un maximum; 2 plans passant respectivement par les 2 droites ont un angle maximum lorsqu'ils contiennent AA_1, minimum quand ils passent par BB_1.

3. Pour généraliser la notion de courbure totale, nous utilisons un théorème de Jordan (C. R.; 79) (Euler pour $n = 3$). Considérons dans l'$\varepsilon_n = \varepsilon_{m+k}$ une « k-surface » définie par un système de k équations simultanées: $x_{m+i} = f_i(x_1, \dots, x_m)$ pour $i = 1 \dots k$; elle présente en chaque point m directions rectangulaires telles que la somme des carrés des angles formés par deux « k-plans » tangents consécutifs divisée par ds^2 soit maximum ou minimum. En désignant ce quotient par $\frac{1}{R_1^2}, \dots, \frac{1}{R_m^2}$ pour chacune de ces m directions, nous appellerons *courbure totale* de la « k-surface » en un de ses points P le produit: $c = \frac{1}{R_1 \dots R_m}$. Si l'on représente les dérivées secondes par $r^i_{la} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_l \partial x_a}$ et la double somme $\sum_{i,l} r^i_{la} r^i_{lb}$ par le symbole (a, b), on trouve, en prenant P pour origine et son « k-plan » tangent pour espace de coordonnées

$$c^2 = \begin{vmatrix} (1, 1) & \dots & (1, m) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ (m, 1) & \dots & (m, m) \end{vmatrix}.$$

Pour $i = 1$, on a la surface: $x_n = f(x_1 \dots x_{n-1})$; le déterminant ci-dessus est alors un carré parfait et l'expression de la courbure totale est:

$$c = \begin{vmatrix} r_{11} & \dots & r_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & \dots & r_{mm} \end{vmatrix} \quad \text{en posant} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_a} = r_{la} \quad (l \text{ et } a = 1 \dots m)$$

$(rt - s^2$ pour $n = 3)$.

---

[1] DARBOUX. *Principes de géom. anal.*, 1917, p. 310.

8. — Chargé par le Comité de la Société mathématique suisse d'introduire la question de l'*adhésion de la Suisse à l'Union internationale mathématique*, M. H. FEHR donne un aperçu des statuts de l'Union adoptés à Strasbourg le 20 septembre 1920. Cette union se rattache au Conseil international de recherches créé sous les auspices de la Conférence internationale des académies. L'admission d'un pays à l'Union est subordonnée aux conditions fixées par le Conseil international de recherches. La Société helvétique des sciences naturelles ayant adhéré au Conseil international, en août 1920, la Société mathématique suisse ne saurait se tenir à l'écart de l'Union internationale mathématique. La question sera soumise à l'assemblée annuelle (Schaffhouse, août 1921) après entente avec le Comité central de la Société helvétique.

Société mathématique suisse.

Schaffhouse, 27 août 1921.

La Société mathématique suisse a tenu sa onzième réunion annuelle à Schaffhouse, le 27 août 1921, sous la présidence de M. le Prof. L. CRELIER (Berne), à l'occasion de la cent-deuxième réunion annuelle de la Société helvétique des sciences naturelles.

Dans sa *séance administrative* la Société a décidé, à l'unanimité, d'accord avec le Comité central de la Société helvétique, d'adhérer à l'*Union internationale mathématique*. Puis, après avoir donné décharge au trésorier sortant de charge, elle a constitué comme suit le comité pour les années 1922 et 1923: M. Gustave DUMAS (Lausanne), président; M. O. SPIESS (Bâle), vice-président; M. A. SPEISER (Zurich), secrétaire-trésorier.

La prochaine réunion annuelle aura lieu à *Berne*.

COMMUNICATIONS SCIENTIFIQUES.

1. — M. S. BAYS (Fribourg). — *Sur la généralisation du problème des triples de Steiner.* — Appelons *n-uple* une combinaison n à n, et *problème des n-uples*, le problème suivant, généralisant le *problème des triples de Steiner :*

Pour quel nombre N *d'éléments, peut-on trouver un* SYSTÈME DE N-UPLES, *contenant* UNE FOIS et UNE SEULE FOIS *chaque* (n — 1)-*uple de ces éléments* [1] ?

[1] Exemple : Le triple 123 contient les trois couples 12, 13, 23, et le système de triples (de Steiner) 123, 145, 167, 246, 257, 347, 356, contient une fois et une seule fois chaque couple des sept éléments 1, 2, ..., 7. Voir NETTO, *Combinatorik*, chap. 10, p. 202.