Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 22 (1921-1922)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE NOMBRE e.

Autor: Petrovitch, Michel

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515730

SUR LE NOMBRE *e*.

PAR

Michel PETROVITCH (Belgrade).

1\. — Le développement classique exprime le nombre e sous la forme de somme de fractions rationnelles ayant pour numérateurs l'unité. L'identité

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_p x^p)\, e^x \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathrm{M}_n x^n \ ,$$

où

$$\mathrm{M}_n = \frac{a_0}{n\,!} + \frac{a_1}{(n-1)\,!} + \frac{a_2}{(n-2)\,!} + \dots + \frac{a_p}{(n-p)\,!} \ ,$$

fournit le moyen d'exprimer e, et cela d'une infinité de manières, sous la forme de somme de fractions rationnelles irréductibles ayant pour numérateurs des entiers autres que 1. Et en particulier:

Il est possible d'exprimer e *comme somme de fractions rationnelles irréductibles ayant pour numérateurs la suite naturelle de nombres premiers impairs*

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ \dots$$

En effet, l'identité

$$(x+1)\,e^x = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{n+1}{n\,!}\, x^n \qquad (1)$$

fait voir, pour $x = 1$, que

$$e = \sum_{0}^{\infty} \lambda_n \ ,$$

où

$$\lambda_n = \frac{1}{2}\,\frac{n+1}{n\,!}\,. \tag{2}$$

D'après la conséquence connue du théorème de Wilson, lorsque $n+1$ est composé et $n > 3$ on a

$$\frac{n\,!}{n+1} = \text{nombre entier}$$

et lorsque $n+1$ est premier, on a

$$\frac{n\,!}{n+1} = \text{nombre entier} - \frac{1}{n+1}\,.$$

Il s'en suit que les λ_n sont des fractions rationnelles, lesquelles, réduites à leurs plus simples expressions, ont pour numérateur 1 lorsque $n+1$ est composé, et $n+1$ lorsque c'est un nombre premier, ce qui démontre la proposition.

Le nombre e se laisse ainsi exprimer sous la forme

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{s_n} + \sum \frac{p_n}{q_n}\,, \tag{3}$$

où p_n, q_n, s_n sont des nombres entiers tels que, la fraction $\frac{p_n}{q_n}$ étant réduite à sa plus simple expression, p_n *soit le* $n^{\text{ième}}$ *terme de la suite naturelle de nombres premiers impairs.*

2. — Au point de vue de la propriété arithmétique précédente le nombre e n'est qu'un cas particulier d'une classe plus générale de nombres jouissant de la même propriété.

Soient α_0, α_1, α_2 ... des nombres entiers quelconques et considérons la fonction

$$f(x) = \frac{1}{0\,!\,\alpha_0} + \frac{x}{1\,!\,\alpha_1} + \frac{x^2}{2\,!\,\alpha_2} + \cdots$$

holomorphe dans tout le plan de la variable x. On a

$$\frac{d}{dx}\left[xf(x)\right] = \sum_0^{\infty} \frac{(n+1)\,x^n}{n\,!\,\alpha_n}$$

et par suite

$$\frac{f(1) + f'(1)}{2} = \sum_0^{\infty} \frac{\lambda^n}{\alpha_n}\,.$$

où λ_n est le nombre précédent (2).

Le nombre

$$M = \frac{f(1) + f'(1)}{2}$$

se laisse donc exprimer sous la forme de somme de fractions rationnelles irréductibles n'ayant pour numérateurs que des nombres premiers.

Dans le cas où α_n n'est pas divisible par $n + 1$ pour $n + 1$ premier, le nombre M se laisse exprimer sous la forme (3). Tel est, par exemple, le cas de

$$\alpha_n = (n\,!)^k\,, \qquad \alpha_n = (n + 2)(n\,!)^k\,, \qquad \text{etc.},$$

k étant un entier positif. Le nombre e correspond au cas particulier où

$$\alpha_n = 1 \qquad f(x) = e^x\,.$$

Etant donnée une fonction $\varphi(x)$ développable pour $|x| \geqq 1$ en série de la forme

$$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha_0} + \frac{x}{\alpha_1} + \frac{x^2}{\alpha_2} + \cdots\,,$$

les α_n étant des entiers quelconques, il est possible d'en former un nombre précédent M sous la forme d'une intégrale définie portant sur des combinaisons simples de $\varphi(x)$. On partira des formules connues exprimant le nombre $\frac{1}{n\,!}$ sous forme d'une intégrale définie, à l'aide de laquelle en exprimera la fonction $f(x)$ à l'aide de $\varphi(x)$. Telles seraient, par exemple, les formules suivantes:

$$\frac{1}{n\,!} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{\cos t}\cos(\sin t)\cos nt\,dt\,,$$

$$\frac{1}{n\,!} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi e^{\cos t}\sin(\sin t)\sin nt\,dt\,,$$

$$\frac{1}{n\,!} = \frac{e^{ac}}{2\pi c^n}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{cti}}{(a + ti)^{n+1}}\,dt\,,$$

(c et la partie réelle de a étant des quantités positives).