SUR LE RAYON DE COURBURE D'UNE COURBE

Autor(en): **Niewenglowski, B.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-515728

SUR LE RAYON DE COURBURE D'UNE COURBE

PAR

B. NIEWENGLOWSKI (Paris).

---

1. — Le rayon de courbure d'une conique en un point M est donné par la formule

$$R = \frac{N^3}{p^2}, \tag{1}$$

p désignant le paramètre de la courbe et N la longueur du segment MN de la normale en M, N étant sa trace sur un axe de symétrie de la conique.

Plus généralement, s'il s'agit d'une courbe plane quelconque, en gardant les mêmes notations, on a

$$N^2 = y^2(1 + y'^2),$$

d'où il suit que

$$(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{N^3}{y^3},$$

et par conséquent

$$R = \frac{N^3}{|y^3 y''|}. \tag{2}$$

La formule (1) se déduit d'ailleurs très simplement de (2) si l'on prend pour axe des x un axe de symétrie de la conique considérée, l'origine étant l'un des sommets situés sur cet axe. En effet, l'équation de la conique étant alors

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

on a successivement

$$yy' = p + qx, \qquad y'^2 + yy'' = q, \qquad y^2y'^2 + y^3y'' = qy^2,$$

$$y^3y'' = q(2px + qx^2) - (p + qx)^2 = -p^2,$$

$$|y^3y''| = p^2.$$

2. — *Remarque I.* L'équation (1) caractérise les coniques. En effet, si cette équation est vérifiée on a

$$y^3 y'' = a \ ,$$

a désignant une constante. On en tire successivement

$$y' dy' = a \frac{dy}{y^3} \ , \qquad y'^2 = b - \frac{a}{y^2}$$

b étant une nouvelle constante, et ensuite

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{by^2 - a}}$$

et enfin

$$(x + c)^2 = by^2 - a$$

c étant encore une constante.

3. — *Remarque II.* Le cas de l'hyperbole équilatère mérite d'être signalé. En prenant pour axes de coordonnées les axes de symétrie, l'équation peut s'écrire

$$x^2 - y^2 = a^2$$

ce qui donne $yy' = x$; alors $N^2 = y^2 + x^2 = r^2$, r désignant la distance du point $M(x, y)$ au centre et dans ce cas: $R = \frac{r^3}{a^2}$.

4. — *Cas où l'on prend pour variable indépendante l'arc* s *de la courbe plane que l'on étudie.* Dans ce cas la relation entre le rayon de courbure R et la normale N prend un autre aspect.

Les axes de coordonnées étant toujours supposés rectangulaires, si α désigne l'angle de la tangente en $M(x, y)$ avec l'axe $x'x$, on sait que

$$x' = \cos\alpha \ , \qquad y' = \sin\alpha \ ,$$

d'où

$$x'' = -\sin\alpha . \alpha' \ , \qquad y'' = \cos\alpha . \alpha' \ , \qquad \text{et} \qquad \alpha' = \frac{1}{R} \ ,$$

les dérivées x', y', α', x'', y'' étant prises par rapport à s.

On en déduit

$$R = \frac{x'}{y''} = -\frac{y'}{x''} \ . \tag{3}$$

D'autre part

$$N = \frac{y}{\cos\alpha} = \frac{y}{x'}, \qquad \text{donc} \qquad R = \frac{y}{y''N}$$

au signe près; ou plus correctement

$$R = \left|\frac{y}{y''}\right| \times \frac{1}{N} . \tag{4}$$

Pareillement si N' désigne la longueur de la normale comptée jusqu'à l'axe du y, on trouvera

$$R = \left|\frac{x}{x''}\right| \times \frac{1}{N'} . \tag{4'}$$

5. — Applications. *Courbes telles que* $R = \pm N$.

1° Posons, en premier lieu

$$\frac{x'}{y''} = \frac{y}{x'}, \qquad \text{ou} \qquad x'^2 = yy'' .$$

Mais puisque s est la variable indépendante, on sait que

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

donc

$$yy'' + y'^2 = 1 ;$$

une première intégration donne

$$yy' = s + h ,$$

h étant une constante. En changeant l'origine des arcs par la courbe, on peut supprimer h et écrire

$$yy' = s$$

d'où l'on tire

$$y^2 = s^2 + a^2$$

a désignant la valeur de y pour $s = o$.

On en tire

$$y' = \frac{s}{\sqrt{s^2 + a^2}}, \qquad \text{et par suite} \qquad \frac{x'}{a} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + a^2}},$$

ce qui donne, en supposant $x = o$ pour $s = o$ (ce qui est permis car une translation parallèle à $x'\,x$ ne change ni R ni N):

$$\sqrt{s^2 + a^2} + s = ae^{\frac{x}{a}}, \qquad \sqrt{s^2 + a^2} - s = ae^{-\frac{x}{a}}.$$

On en tire

$$s = a \operatorname{Sh} \frac{x}{a}$$

et par conséquent

$$y = a \operatorname{Ch} \frac{x}{a} .$$

La courbe est une chaînette.

2° Posons maintenant

$$\frac{y'}{x''} = \frac{y}{x'} , \qquad \text{ce qui peut s'écrire} \qquad \frac{x''}{x'} = \frac{y'}{y} ,$$

d'où

$$x' = \frac{y}{a} ,$$

a désignant une constante arbitraire on a ainsi

$$1 - y'^2 = \frac{y^2}{a^2} .$$

Mais si l'on pose $x' = \sin t$, $y' = \cos t$ on en tire: $y = a \sin t$ donc

$$y' = a \cos t \frac{dt}{ds} \qquad \text{et par suite} \qquad \frac{ds}{dt} = a$$

en prenant convenablement l'origine des arcs on peut donc poser $t = \frac{s}{a}$ et l'on a

$$y = a \sin \frac{s}{a}$$

$$x' = \sin \frac{s}{a} , \qquad \text{donc} \qquad x = - a \cos \frac{s}{a} + x_0 ,$$

et enfin

$$(x - x_0)^2 + y^2 = a^2 ,$$

solution évidente a priori.

6. — *Courbes telles que* R $= \pm$ 2N.

1° Posons tout d'abord

$$\frac{y'}{x''} = 2 \frac{y}{x'} , \qquad \text{ou} \qquad 2 \frac{x''}{x'} = \frac{y'}{y}$$

on en tire

$$x'^2 = 1 - y'^2 = \frac{y}{a} ,$$

a étant une constante arbitraire.

La dernière équation pouvant s'écrire ainsi:

$$\frac{y}{a} + y'^2 = 1$$

posons

$$\frac{y}{a} = \sin^2 \frac{1}{2} t \qquad \text{d'où} \qquad y' = \cos \frac{1}{2} t \ .$$

On en déduit

$$dy = a \sin \frac{1}{2} t \cos \frac{1}{2} t . dt \ .$$

Mais

$$dy = y' ds = \cos \frac{1}{2} t . ds$$

ce qui entraîne cette conséquence:

$$ds = a \sin \frac{1}{2} t . dt \ .$$

Mais

$$x'^2 = 1 - y'^2 = \sin^2 \frac{1}{2} t \ .$$

On peut prendre

$$x' = \frac{dx}{ds} = \sin \frac{1}{2} t \ ,$$

donc

$$dx = \sin \frac{1}{2} t \, ds = a \sin^2 \frac{1}{2} t . dt \ .$$

En intégrant on obtient

$$x = \frac{a}{2} (t - \sin t) + x_0$$

et l'on a déjà

$$y = \frac{a}{2} (1 - \cos t) \ .$$

La courbe cherchée est donc une cycloïde.

2° Soit maintenant

$$\frac{y'}{x''} = - 2 \frac{y}{x'} \ , \qquad \text{ou} \qquad 2 \frac{x''}{x'} + \frac{y'}{y} = 0 \ .$$

On a ainsi

$$x'^2 = \frac{a}{y}$$

a désignant une constante arbitraire.

On a donc

$$1 - y'^2 = \frac{a}{y} .$$

En posant $x' = \cos\varphi$, $y' = \sin\varphi$ on en déduit

$$y = \frac{a}{\cos^2\varphi} . \tag{5}$$

$$dy = \frac{2a \sin\varphi}{\cos^3\varphi} d\varphi = \sin\varphi \, ds$$

donc

$$ds = \frac{2a d\varphi}{\cos^3\varphi} \quad \text{et} \quad dx = \frac{2a d\varphi}{\cos^2\varphi} ,$$

donc enfin

$$x = 2a \operatorname{tg}\varphi + x_0 . \tag{6}$$

En éliminant φ entre les équations (5) et (6), on trouve

$$y = a + \frac{(x - x_0)^2}{4a}$$

équation d'une parabole.

7. — Extension a l'Espace. Nous commencerons par la formule (4). Nous prendrons trois axes rectangulaires et nous appellerons N la longueur MN comprise entre le point M et le point N où la *normale principale* relative à M perce le plan *xoy*.

Les équations de la normale principale étant

$$\frac{X - x}{s'x'' - x's''} = \frac{Y - y}{s'y'' - y's''} = \frac{Z - z}{s'z'' - z's''} .$$

On en déduit aisément

$$N^2 = \frac{z^2}{(s'z'' - z's'')^2}\left[(s'x'' - x's'')^2 + (s'y'' - y's'')^2 + (s'z'' - z's'')^2\right] .$$

Mais le crochet a pour valeur

$$s'^2[x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2] , \quad \text{donc} \quad N^2 = \frac{z^2 s'^2[x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2]}{(s'z'' - z's'')^2} .$$

D'autre part

$$R^2 = \frac{s'^4}{x''^2 + y''^2 + z''^2 - s''^2} .$$

On en conclut que

$$R = \left|\frac{zs'^3}{(s'z'' - z's'')N}\right| . \tag{7}$$

La variable indépendante est arbitraire — choisissons l'axe s pour paramètre — il vient, puisqu'alors $s' = 1$, $s'' = 0$:

$$R = \left|\frac{z}{z''N}\right| . \tag{8}$$

Pour obtenir une relation analogue à la formule (2), on peut procéder de la manière suivante:

La normale principale peut être définie comme étant l'intersection du plan osculateur et du plan normal relatifs au point M. Les dérivées étant prises par rapport à un paramètre arbitraire t, si l'on pose

$$A = y'z'' - z'y'' \qquad B = z'x'' - x'z'' \qquad C = x'y'' - y'x'' ,$$

on reconnaît que les équations de la normale principale peuvent s'écrire ainsi:

$$\frac{X - x}{Bz' - Cy'} = \frac{Y - y}{Cx' - Az'} = \frac{Z - z}{Ay' - Bx'} ,$$

et par suite:

$$N^2 = \frac{z^2}{(Ay' - Bx')^2}\left[(Bz' - Cy')^2 + (Cx' - Az')^2 + (Ay' - Bx')^2\right] .$$

Mais

$$(A^2 + B^2 + C^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) = (Ax' + By' + Cz')^2 + (Bz' - Cy')^2$$
$$+ (Cx' - Ax')^2 + (Ay' - Bx')^2 ,$$

et si l'on remarque que

$$Ax' + By' + Cz' = 0 \qquad \text{et} \qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = s'^2 ,$$

on voit que

$$N^2 = \frac{z^2 s'^2[A^2 + B^2 + C^2)}{(Ay' - Bz')^2} .$$

D'autre part

$$R = \frac{s'^3}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}} ,$$

donc

$$R = \left|\frac{(Ay' - Bx')^3}{z^3}\right| \frac{N^3}{(A^2 + B^2 + C^2)^2} . \tag{9}$$

Remarque. — Si dans la formule (9) on suppose $y \equiv o$, ce qui revient à dire que la courbe est plane et tracée dans le plan des yz, on a dans ce cas $y' = 0$, $y'' = 0$, par suite $A = 0$ $C = 0$ et la formule se réduit à

$$R = \left| \frac{x'^3}{z^3(z'x'' - x'z'')} \right| N^3 ,$$

formule qui coïncide avec la formule (2) si $x' = 1$, $x'' = 0$ z remplaçant y.

Pareillement si l'on suppose la courbe plane et tracée dans le plan des x, y la formule (7) donnera

$$R = \left| \frac{ys'^3}{s'y'' - y's''} \right| \times \frac{1}{N} ,$$

qui coïncide avec la formule (4) quand $s' = 1$, $s'' = 0$.

Application. On peut mettre les équations d'une hélice circulaire dont l'axe est pris pour axe des x, sous la forme

$$y = a \cos \frac{s}{b} , \qquad z = a \sin \frac{s}{b} , \qquad x = \frac{hs}{2\pi b} .$$

où $b = \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}$, a étant le rayon de la section droite du cylindre sur lequel l'hélice est tracée et h le pas de cette hélice. On trouve alors $N = a$, et puisque $\frac{z}{z''} = -b^2$

$$R = \frac{b^2}{a} = a + \frac{h^2}{4\pi^2 a} .$$