Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 22 (1921-1922)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA CRISTALLOGRAPHIE

Autor: Winants, Marcel

Kapitel: § 7. — Etude de la courbure.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515727

par deux points donnés de la sphère, puis celle du grand cercle tangent à une courbe donnée en un point donné.

Si le point M doit appartenir à la surface tétraédrique que nous étudions, il faudra qu'on ait:

$$\sin\alpha \,.\, \sin\beta \,.\, \sin\gamma = \frac{p^3}{m^3}\,. \qquad (4)$$

En discutant les signes, on verra que l'équation (4) représente les quatre ovales et démontre la symétrie tétraédrique de leur ensemble.

§ 7. — **Etude de la courbure.**

43. — En géométrie infinitésimale, on démontre que la courbure totale, en un point ordinaire d'une surface, est l'inverse du produit des rayons de courbure principaux (19). Elle est susceptible de l'expression suivante:

$$k = \frac{\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2}{\left\{1 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right\}^2}\,.$$

44. — Appliquons cette formule à la surface:

$$xyz = p^3\,.$$

Les dérivées partielles ont été données plus haut (22). On a, après un calcul facile:

$$k = \frac{3p^6x^4y^4z^4}{p^{12}\left\{y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2\right\}^2} = \frac{3}{p^6\left\{\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}\right\}^2} \qquad (1)$$

$$= \frac{3p^6}{\left\{y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2\right\}^2}\,. \qquad (2)$$

Ces formules nous montrent que la courbure est constamment positive. Tous les points de la surface sont donc des points elliptiques.

45. — De la formule (1), on déduit que c'est aux ombilics que la courbure totale est maxima.

46. — Recherchons les lignes en tous les points desquelles

la surface a la même courbure totale. D'après la formule (1), on doit avoir:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{1}{c^2}\,.$$

Cette équation représente des surfaces algébriques du sixième ordre, à huit nappes, admettant les plans

$$x=\pm c\;;\qquad y=\pm c\;;\qquad z=\pm c\;;$$

comme plans asymptotes. L'origine est un point quadruple isolé. Toute section faite dans l'une de ces surfaces par un plan parallèle à un plan coordonné, est une krenzcurve.

On obtient un résultat d'apparence plus simple en considérant l'équation (2). Une ligne de courbure totale constante est représentée par les équations:

$$y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2=a^4\,,\qquad xyz=p^3\,.$$

On pourrait faire ici la même remarque qu'au n° 41.

47. — Au n° 31, nous avons trouvé la longueur de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan, tangent à la surface, au point (x, y, z):

$$d=\frac{3p^3}{\sqrt{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2}}\,.$$

Il en résulte:

$$d^4=\frac{81p^{12}}{\{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2\}^2}\,.$$

En comparant cette formule à la formule (2) du n° 44, on trouve:

$$k=\frac{d^4}{27p^6}\,.$$

Théorème: Si, en chaque point d'une ligne de courbure totale constante, on mène le plan tangent à la surface, tous ces plans enveloppent une sphère, dont le centre se trouve à l'origine.

Cette propriété est encore compatible avec la symétrie de la surface (41).

(A suivre).