

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 22 (1921-1922)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE  
  
**Kapitel:** Société mathématique suisse.

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

ressant qui se présente dans les problèmes de la physique mathématique: Chercher trois composantes  $u$ ,  $v$ ,  $w$  d'un vecteur  $A$  dont le point d'application  $P$  est situé sur une surface fermée  $S$ .

30. — M. DONTOT, *Sur une formule d'Euler*.

31. — M. CLAPIER présente sa Note *Sur les équations irrationnelles de la forme*

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + \dots = 0.$$

L'auteur donne une méthode simple pour les rendre rationnelles. Il interprète géométriquement ces formes et généralise pour le cas de 5 variables, les propriétés de la surface de STEINER.

32. — M. RIABOUCHINSKY, envoie une Note *Sur les mouvements plans des fluides autour de solides avec tourbillons*. L'auteur obtient pour chaque configuration des solides et des tourbillons des constantes cycliques bien déterminées.

Après l'élection de M. le Lt-Col. PERRIER, comme président de la Section pour 1923, M. CLAPIER prononce un discours de clôture. La Section remercie vivement M. CLAPIER qui a su intéresser aussi de nouveaux collègues et les amener à notre groupement.

Questions à l'ordre du jour pour le Congrès A. F. A. S. 1923 (Bordeaux):

1<sup>o</sup> Réforme du calendrier. — 2<sup>o</sup> Rapports entre la géologie et l'astronomie. — 3<sup>o</sup> L'accélération du moyen mouvement de la Lune. — 4<sup>o</sup> Equations irrationnelles de la forme

$$\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y} + \sqrt[n]{z} + \dots = 0.$$

5<sup>o</sup> Bio-Bibliographie d'un savant de la Région de Bordeaux. — 6<sup>o</sup> Détermination des efforts secondaires dans les poutres américaines à grande portée.

### Société mathématique suisse.

*Berne, 26 août 1922.*

La Société mathématique suisse a tenu sa douzième réunion ordinaire à Berne, le 26 août 1922, sous la présidence de M. le Prof. Gustave DUMAS (Lausanne). La partie scientifique comprenait douze communications dont voici les résumés:

1. — Prof. Marcel GROSSMANN (Zurich). — *Géométrie dans le système des antipolaires*. — Si on ordonne à chaque point d'un plan son « antipolaire » par rapport à un cercle donné, il en résulte un système polaire par rapport à un cercle imaginaire. Si on prend celui-ci comme conique absolue d'une métrique projective, on aura une représentation de la géométrie elliptique (non-euclidienne). Chaque triangle polaire sera par exemple un triangle avec trois angles droits. A chaque figure et à chaque construction de la géométrie elliptique correspondra une figure et une construction dans le système polaire.

Comme exemple on donne la construction d'un cercle dont on connaît le centre et un point de la circonférence. Il est facile de trouver parmi les cercles concentriques autour du centre donné une courbe qui est à la fois cercle de la géométrie euclidienne. Tous les autres cercles de la géométrie sont collinéaires à cette courbe.

2. — Prof. A. SPEISER (Zurich). — *Groupes de congruences*. — D'après le théorème de C. Jordan il n'y a qu'un nombre limité de groupes simples représentables par des substitutions de degré  $n$  avec des coefficients réels ou complexes. Si au contraire on prend pour coefficients les résidus d'un nombre premier  $p$  ou d'un idéal premier (un domaine d'imaginaires de Galois), on a une infinité de tels groupes. Cependant on peut démontrer par la théorie du déterminant des groupes, que si l'ordre d'un groupe de congruences est premier à  $p$ , ce groupe est représentable comme groupe de substitutions du même degré avec des coefficients réels ou complexes. La complexité immense des groupes de congruences dépend donc uniquement du facteur  $p$  de l'ordre.

3. — Prof. R. FUETER (Zurich). — *La théorie indépendante des fonctions modulaires elliptiques*. — Hurwitz, dans sa thèse de doctorat, a le premier défini et développé les fonctions modulaires elliptiques sans revenir à la théorie des fonctions elliptiques. Plus tard (*Math. Annalen*, t. 48), il a simplifié ses démonstrations, sans parvenir cependant à un résultat tout à fait satisfaisant. C'est à l'aide du théorème de Fourier

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 f(\xi) e^{2\pi i n \xi} d\xi = \frac{f(0) + f(1)}{2}$$

qu'on arrive au bout sans difficulté. Cette théorie sera exposée dans un ouvrage didactique en préparation.

4. — Prof. A. EMCH (Urbana, E.-U.). — *Sur quelques applications géométriques des groupes de substitutions symétriques*. — Cette communication envoyée par notre savant concitoyen soleurois se

rattache au mémoire fondamental de Veronese sur l'interprétation géométrique de la théorie des substitutions de  $n$  lettres. Elle sera insérée dans un prochain n° de *l'Enseignement mathématique*.

5. — D<sup>r</sup> Charles WILLIGENS (Interlaken). — *Application du calcul des probabilités à l'adaptation des salaires au coût de la vie.* — On appelle nombre indice un nombre qui est sensé indiquer la dépense nécessaire à une famille type. On obtient ces nombres indices à l'aide de comptes de ménages, en prenant la moyenne des quantités consommées pour la nourriture, les vêtements, etc. Ce procédé, ainsi que celui employé pour déterminer la composition de la famille correspondant à la moyenne est très rudimentaire et sujet à caution. Dans ce qui suit nous admettrons que l'on dispose d'un nombre indice acceptable, représentant la moyenne des dépenses des ménages de la Suisse. Connaissant les besoins et les prix du jour, on pourra à tout moment calculer la valeur de cette moyenne.

Supposons que nous connaissions le revenu  $x$  de chaque ménage. Soit  $M_x \Delta x$  le nombre de ménage dont le revenu est compris entre  $x$  et  $x + \Delta x$ ,  $M$  le nombre total des ménages. Sur les longueurs  $\Delta x$  égales portées sur l'axe des  $x$ , construisons des rectangles de hauteur  $\frac{M_x}{M}$ . L'aire du rectangle représente la fréquence des ménages de revenu compris entre  $x$  et  $x + \Delta x$ . A l'aide d'un procédé d'interpolation, on peut déterminer, connaissant un certain nombre des ménages seulement, une fonction  $V(x)$ , tel que  $V(x)dx$  représente la probabilité pour un ménage ayant un revenu compris entre  $x$  et  $x + dx$ . Le procédé consiste à prendre un nombre suffisant de termes du développement en série uniformément convergente, suivant les polynômes qui s'introduisent dans les dérivées successives de <sup>1</sup>

$$J = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}.$$

Dans ce qui suit nous nous contenterons de la 1<sup>re</sup> approximation, les données faisant défaut pour pousser plus loin. L'indice  $J$  est donné comme moyenne des valeurs de  $x$  par l'intégrale

$$J = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-h^2(x-J)^2} dx.$$

<sup>1</sup> Voir pour la méthode : E. CZUBER. *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 3<sup>e</sup> édition, t. I, p. 418. — Voir aussi l'exposé de A. GULDBERG dans les *Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens*, Strasbourg, 1920, p. 552.



En effet  $V(x) dx \propto M$  étant le nombre des familles de revenu entre  $x$  et  $x + dx$ , leur dépense supposée égale à leur revenu sera  $x \cdot M + V(x) dx$ . Pour tous les ménages la dépense sera

$$M \int_{-\infty}^{+\infty} x V(x) dx$$

et la moyenne de ces dépenses sera

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} x V(x) dx$$

ici nous prenons

$$V(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(x-J)^2}.$$

Si par suite d'une variation de prix l'indice prend une valeur  $J'$  et si nous désignons par  $\varphi(x)$  le nouveau revenu, déterminé en fonction de l'ancien, on aura

$$J' = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{-h^2(x-J)^2} dx, \quad (1)$$

c'est-à-dire que  $J'$  devra de nouveau être la moyenne des revenus. La constante  $h$  est donné par la formule:

$$1 : h \sqrt{2} = \sqrt{\frac{\sum (x - J)^2}{n}}, \quad (2)$$

la somme étant formée pour les valeurs de  $x$  pour les ménages connus, au nombre de  $n$ .

(1) donne une relation permettant de déterminer des constantes laissées arbitraires dans  $\varphi(x)$ .

Nous imposerons en outre la condition:

$$J' = \varphi(J) \quad (3)$$

pour que le maximum de l'exponentielle corresponde de nouveau au nombre indice.

I. Si l'on pose  $\varphi(x) = \lambda x$  les conditions (1) et (3) sont identiques et on a

$$\varphi(x) = \frac{J'}{J} x.$$

II. Si l'on a  $\varphi(x) = ax + b$  les conditions (1) et (3) donnent  $J' = aJ + b$  Si l'on veut assurer un revenu minimum  $i'$  correspondant à un ancien

revenu minimum  $i$  on aura  $i' = ai + b$ , soit en définitive le nouveau salaire

$$\varphi(x) = \frac{J' - i'}{J - i}(x - J) + J'.$$

III. Si  $\varphi(x)$  est quelconque on aura

$$\varphi(x) = \varphi(J + x - J) = \varphi(J) + \frac{x - J}{1} \varphi'(x) + \frac{(x - J)^2}{2!} \varphi''(J) + \dots$$

que nous supposerons convergente pour toute valeur de  $x$ . On a  $\varphi(J) = J'$  et (1) donnera une relation entre les valeurs des dérivées de  $\varphi(x)$  pour  $x = J$ .

On pourrait encore faire l'adaptation en assurant un salaire minimum et en remarquant que la variation du prix de la vie est d'autant moins éprouvé que le revenu est élevé. Si l'on adopte l'hypothèse de Daniel Bernoulli sur la valeur morale d'une somme, on obtient la formule

$$\varphi(x) = x + \frac{i' - i}{\log \frac{i'}{i}} \log \left( 1 + \frac{i' - i}{x} \right),$$

pour  $x = i$ , on a bien  $\varphi(x) = i'$ ; à l'ancien salaire minimum, correspond le nouveau minimum.

6. — Dr Jules CHUARD (Lausanne). — *Le problème des quatre couleurs*. — Le problème de la coloration de la carte sur la sphère est bien connu: Quatre couleurs ont toujours suffi à colorier les subdivisions d'une carte terrestre, à condition de ne pas donner la même couleur à deux d'entre elles qui ont en commun une ou plusieurs lignes de séparation<sup>1</sup>. La condition de suffisance n'a cependant pas été établie jusqu'ici.

Des résultats antérieurement acquis ont montré que toute la difficulté consistait à colorier une carte dont les frontières forment un réseau cubique. Or de tels réseaux sont réductibles, de diverses manières, en un réseau quadratique et un réseau linéaire.

J'ai tiré d'un procédé dû à M. VEBLEN<sup>2</sup>, un moyen d'obtenir tous ces réseaux quadratiques, partant toutes les réductions d'un réseau cubique donné. En correspondance avec ce réseau on établit une certaine matrice, dont chaque ligne concourt à la formation d'une équation linéaire et homogène. Leur ensemble compose le système (1) dont les solutions jouissent des propriétés suivantes:

<sup>1</sup> A. ERRERA. *Du coloriage des cartes...* Paris, Gauthier-Villars; Bruxelles, Falk fils, 1921.

<sup>2</sup> O. VEBLEN. An application of modular equations in Analysis Situs. (*Annals of Mathematics*, Princeton, 1912, p. 86.)

Il existe  $\alpha_2 - 1$  solutions linéairement indépendantes,  $\alpha_2$  étant le nombre des pays.

Le nombre total de solutions est  $2^{\alpha_2 - 1}$ .

A tout contour fermé constitué par des arêtes du réseau, correspond une solution du système (1). A toute solution du système (1) correspond un contour fermé ou un ensemble de contours fermés.

Les réseaux quadratiques correspondent aux solutions qui renferment  $\alpha_0$  valeurs différentes de zéro.

Le nombre des réductions du réseau cubique considéré est ainsi égal à celui des solutions du système (1) qui ont  $\alpha_0$  valeurs différentes de zéro. Le nombre total des solutions du système (1) étant fini, on a la possibilité d'obtenir toutes ces réductions.

En vue de la coloration de la carte à l'aide de quatre couleurs, on peut classer les réseaux quadratiques obtenus plus haut en trois types suivant qu'ils comprennent:

a) Un contour fermé unique. — b) Deux ou plusieurs contours fermés, chacun d'eux renfermant un nombre pair d'arêtes. — c) Deux ou plusieurs contours fermés parmi lesquels il en est qui renferment un nombre impair d'arêtes.

L'on a enfin les propositions:

*L'existence d'un seul réseau des types a ou b suffit à assurer la coloration de la carte avec quatre couleurs.*

*Dans tout réseau cubique tracé sur une sphère il existe un réseau quadratique du type a.*

7. — Prof. Rolin WAVRE (Genève). — *Un problème d'itération.* — I. Soient  $\psi_p(z_1, \dots, z_n)$ ,  $n$  fonctions entières ou rationnelles des  $n$  variables complexes  $z_p = x_p + iy_p$  ( $p = 1, \dots, n$ ). Les relations

$$z_p^{(1)} = \psi_p(z_1, \dots, z_n)$$

définissent une substitution, que nous désignerons par  $\Psi$ , du point  $P^{(1)}(z_1^{(1)}, \dots, z_n^{(1)})$  au point  $P(z_1, \dots, z_n)$  de l'espace  $E$  à  $2n$  dimensions  $(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$ .

Soient  $\Psi^{(2)}, \Psi^{(3)}, \dots$  les itérées de la substitution  $\Psi$ . Choisissons un domaine  $D_0$  de  $E$  constitué par l'intérieur de  $n$  courbes analytiques fermées simples  $C_1, \dots, C_n$  situées dans les plans des variables  $z_1, \dots, z_n$  respectivement, tels que  $\Psi$  soit continue<sup>1</sup> à l'intérieur de  $D_0$  et sur sa frontière. Appelons  $D_1$  le premier itéré du domaine  $D_0$  et supposons

<sup>1</sup> Point de continuité — point régulier,  
 » infini — » singulier non essentiel de première espèce,  
 » d'indétermination — » » » de seconde espèce.

que  $D_1$  appartienne ainsi que sa frontière  $F_1$  au domaine  $D_0$ , ce que nous désignerons par l'inégalité

$$D_0 > D_1 + F_1. \quad (1)$$

Formons également l'itéré  $D_m$  de  $D_0$  par la substitution  $\Psi^{(m)}$  et cela pour toutes les valeurs de  $m$ . Les substitutions  $\Psi^{(m)}$  sont continues dans  $D_0$ .

On a évidemment

$$D_0 > D_1 > D_2 > \dots$$

a) Lorsque  $m$  augmente indéfiniment,  $D_m$  tend à se réduire à un point  $\alpha$  de  $E$ , seul point double de la substitution intérieur à  $D_0$ . Le point  $\alpha$  sera dit point double attractif de la substitution.

Nous pouvons toujours prendre le point  $\alpha$  comme origine de l'espace  $E$ . Soit alors  $a_p^{(1)}z_1 + \dots + a_p^{(n)}z_n$  la partie linéaire du développement de  $\Psi_p$  au voisinage de l'origine  $\alpha$ . Supposons le déterminant des  $a_p^{(q)}$  différent de zéro.

b) Les  $n$  racines  $s_1, s_2, \dots, s_n$  de l'équation

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} a_1^{(1)} - s & a_2^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} - s & \dots & a_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{(n)} & a_2^{(n)} & \dots & a_n^{(n)} - s \end{vmatrix} = 0$$

sont toutes en module inférieures à l'unité.

Inversément, si cette condition est vérifiée on peut trouver un domaine  $D_0$  tel que  $D_0 > D_1 + F_1$ .

Formons l'ensemble  $D_{-m}$  des points  $P_{-m}$  où la substitution  $\Psi^{(m)}$  est continue et dont l'itéré  $P_0 = \Psi^{(m)}(P_{-m})$  appartient à  $D_0$  et cela pour toutes les valeurs de  $m$ . Soit  $F_{-m}$  la frontière de  $D_{-m}$ .

Si la relation (1) est vérifiée on a  $D_0 < D_{-1} < D_{-2} < \dots$ . Soit  $D$  l'ensemble de tous les points qui appartiennent à l'un des  $D_{-m}$  et  $F$  sa frontière. La substitution  $\Psi$  peut admettre des points d'indétermination dans le domaine  $D$ . Nous dirons tout de même que  $D$  est un domaine complètement invariant par la substitution et son inverse.

c) Tout point  $p$  de  $F$  est point limite d'une suite  $p_1, p_2, \dots$  de points distincts appartenant respectivement aux frontières  $F_{-1}, F_{-2}, \dots$ ; la substitution  $\Psi^{(m)}$  étant continue en  $p_m$ . C'est la présence des points d'indétermination des substitutions  $\Psi^{(m)}$  qui exige un peu de réflexion pour établir cette proposition. Cette indétermination ne se présente pas dans le cas d'une seule variable.

Soit  $D_\alpha$  l'ensemble des points de  $D$  qui peuvent être reliés à  $\alpha$  par un arc de Jordan dont tous les points appartiennent à  $D$ . Soit  $F_\alpha$  sa frontière.  $F_\alpha$  appartient à  $F$ .  $D_\alpha$  sera appelé domaine immédiat du point  $\alpha$ .  $F$  et  $F_\alpha$  sont deux ensembles parfaits.

II. Considérons l'équation fonctionnelle de Schröder

$$s\varphi[P] = \varphi[\Psi(P)] .$$

Il résulte des recherches de M. LEAU, que cette équation est résoluble par des fonctions  $\varphi_p$  holomorphes au voisinage du point  $\alpha$  pour les racines  $s_p$  respectivement, que nous supposons ici toutes distinctes, et telles que la racine carrée du plus petit de leur module soit supérieure au plus grand.

Par une substitution linéaire, POINCARÉ a montré que l'on peut ramener la substitution  $\Psi$  à la forme canonique

$$z_p^{(')} = s_p z_p + f_p(z_1, \dots, z_n) \quad (p = 1, \dots, n) , \quad (2)$$

les  $f_p$ , évidemment entières ou rationnelles, étant nulles ainsi que leurs dérivées premières à l'origine.

Désignons par  $z_p^{(1)}$ ,  $z_p^{(2)}$ , ... les itérés successifs du point  $z_p$ .

Les expressions

$$\frac{z_p^{(n)}}{s_p^n} \quad (p = 1, \dots, n)$$

tendent respectivement vers les  $n$  fonctions  $\varphi_p(z_1, \dots, z_n)$  lorsque  $n$  augmente indéfiniment.

Donnons un développement de  $\varphi_p$  valable dans tout le domaine  $D$ .

d) Avec la forme canonique (2) les fonctions  $\varphi_p$  peuvent être mises sous la forme suivante :

$$\varphi_p(z_1, \dots, z_n) = z_p + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{f_p(z_1^{(q)}, \dots, z_n^{(q)})}{s_p^{q+1}} , \quad (p = 1, \dots, n) . \quad (2)$$

ce développement étant absolument et uniformément convergent dans tout domaine fermé et borné appartenant à  $D$ .

En un point de  $D$ , un nombre fini de termes peuvent être infinis ou indéterminés, mais alors leur somme est holomorphe au voisinage de ce point. Les fonctions  $\varphi_p$  sont donc holomorphes dans  $D$ .

Pour chaque fonction  $\varphi_p$ , il est possible de définir un domaine  $d_0$ , satisfaisant à la condition (1), donnant évidemment naissance au même domaine  $D$  et sur la frontière duquel on ait,  $r$  étant un nombre positif,

$$|\varphi_p| > r .$$

Supposons donc que le domaine  $D_0$  lui-même donne lieu à cette inégalité. On voit aisément que si le point  $P$  est un point de continuité de  $\Psi^{(m)}$  situé sur  $F_{-m}$ , le point  $\Psi^{(m)}(P)$  est sur  $F_0$ . L'équation de Schröder donne

$$\varphi(P) = \frac{1}{s^m} \varphi[\Psi^{(m)}(P)]$$

et par suite on a

$$|\varphi_P(P)| > \frac{r}{s_p^m} \quad |s_p| < 1$$

en tout point de continuité de  $\Psi^{(m)}$  situé sur  $F_{-m}$ .

e) Ceci montre, en vertu de la proposition c, que chaque point de  $F$  est point limite d'une suite de point de  $D$  sur lesquels le module des fonctions  $\varphi_p$  croît au delà de toute limite.

L'ensemble  $F$  est donc singulier pour les fonctions  $\varphi_p$ . Le domaine  $D$  pourrait se composer de plusieurs domaines disjoints et alors le développement (2) définirait une fonction holomorphe dans chacun d'eux, sans qu'il soit possible de passer de l'un à l'autre par prolongement analytique au sens de Weierstrass. Le domaine  $D_\alpha$  est donc le domaine de Weierstrass au voisinage du point  $\alpha$ .

Une démonstration légèrement différente montrerait qu'il en est de même pour toute solution holomorphe au voisinage de l'origine de l'équation de Schröder sans aucune restriction concernant les racines  $s_p$ .

Nous obtenons donc le résultat suivant:

*Le domaine de Weierstrass des solutions holomorphes au voisinage d'un point double attractif, des solutions de l'équation de Schröder pour une substitution à un nombre quelconque de variables, est le domaine immédiat de ce point.*

Dans le cas d'une seule variable, M. FATOU a démontré cette proposition ainsi que d'autres beaucoup plus précises sur la nature des fonctions  $\varphi$  et de l'ensemble  $F_\alpha$ .

8. — Prof. F. GONSETH (Berne). — *Sur la représentation de Laguerre des imaginaires de l'espace.* — 1. Par la combinaison de la représentation de Laguerre du point imaginaire de l'espace et d'une seconde représentation (que Study nomme dans le plan « das zweite Bildpaar ») on arrive à traiter avec simplicité les problèmes descriptifs de l'espace où entrent des éléments imaginaires. Par exemple la congruence linéaire elliptique s'obtient comme suit: *De chaque point M du plan médian de deux droites dirigées on abaisse la perpendiculaire sur ces droites. La normale en M sur le plan de ces deux perpendiculaires décrit la congruence.*

2. La symétrie de Schwarz-Laguerre par rapport à une courbe plane analytique peut être étendue dans l'espace de la façon sui-

vante: Soit  $\Phi$  une surface analytique, réelle ou imaginaire et  $P$  un point réel. Le cône isotrope de  $P$  coupe  $\Phi$  en une courbe  $\gamma$ , et la développable isotrope circonscrite à  $\gamma$  contient en outre du point  $P$  une courbe réelle  $c$ . La correspondance de contact  $P \rightarrow c$  peut être à certains points de vue (conservation de certains angles) envisagée comme une extension de la symétrie susmentionnée.

Si en particulier  $\Phi$  est une sphère imaginaire,  $c$  est un cercle, qui pour une sphère réelle se réduit au conjugué de  $P$ .

9. — Dr E. ANLIKER (Berne). — *Sur la génération cinématique des astroïdes*. — Examinons le système cinématique dans lequel l'ellipse de demi-axes  $2a$  et  $a$  roule sans glisser sur une *rosace* à quatre branches de paramètre  $2a$  à condition que le petit-axe de l'ellipse passe constamment par le nœud de la rosace.

Nous aurons entre autres les courbes suivantes: Toute droite du plan mobile parallèle au petit-axe de l'ellipse enveloppe une *circonférence*. Toute autre droite formant un angle  $\omega$  avec le petit-axe engendre une *astroïde*, dont la position des axes de symétrie et les dimensions dépendent de  $\omega$ . Par exemple: Toute droite par le centre de l'ellipse enveloppe une *astroïde régulière*; toute droite par un sommet du petit-axe une *demi-croix de Malte*, etc.

Tout point du petit-axe ou de son prolongement décrit la *podaire* de la *développante d'astroïde* enveloppée par la perpendiculaire en ce point sur le petit axe. Le centre de l'ellipse par exemple engendre une *rosace* à quatre branches régulières. Les extrémités du petit-axe décrivent des *Ovales de Mûnger*, etc. Tout autre point décrit une *conchoïde oblique* ou une *orthoconchoïde* de la trajectoire du centre de l'ellipse. En particulier les milieux des demi-axes principaux fournissent des *cornuïdes*.

10. — Dr Paul THALMANN (Berne). — *Sur une nouvelle représentation des fonctions de variables complexes*. — La représentation ordinaire d'un point imaginaire a l'inconvénient qu'un point réel d'une courbe est présenté par deux points différents, c'est-à-dire par un point sur l'axe des  $x$  et un point sur l'axe des  $y$ ; de plus ce couple n'est pas indépendant du choix du système des coordonnées. LAGUERRE et plus tard STUDY ont introduit un autre couple de points n'ayant plus ces désavantages. Je veux montrer, qu'on peut encore choisir de manière simple un autre mode de représentation. (Voir *Jahrbuch der philosoph. Fakultät II der Universität Bern*, Bd. III 1923: Paul THALMANN: *Ueber eine neue graphische Darstellung der komplexen Zahlen*. Dissertation, p. 34-42).

Soient

$$x^* = x + i\xi \quad y^* = y + i\eta.$$

Construisons d'abord  $A(x, y)$ ; puis déplaçons le système des coor-



données jusqu'en A et construisons dans ce nouveau système le point  $B(\xi, \eta)$ . Nous choisissons A et B comme couple représentatif. B a les coordonnées  $u = x + \xi$ ,  $v = y + \eta$  relativement au système primitif. Si nous examinons la transformation  $A \rightarrow B$ , nous obtenons le résultat suivant: chaque surface couverte en  $B(u, v)$  est le double de la surface au point A  $(x, y)$ . De plus la correspondance  $A \rightarrow C$  conserve les aires, avec  $C(\xi, \eta)$ .

On peut, en particulier, à l'aide de cette représentation donner un sens géométrique simple au problème consistant à chercher les points d'intersection d'une droite  $d$  (réelle) et d'une conique — une ellipse par exemple — lorsque ces points sont imaginaires.

Les deux couples représentatifs ont le même point A: l'intersection de  $d$  avec le diamètre conjugué à la direction de  $d$ . Les points B et B' sont sur  $d$ , de part et d'autre de A. Ils sont les points d'intersection toujours réels de  $d$  avec une conique semblable à la donnée, de centre A et d'ailleurs très facile à déterminer.

Si  $d$  se meut parallèlement à elle-même, B et B' sont sur une hyperbole, complémentaire de l'ellipse, déjà introduite par Poncelet. Le système de ces hyperboles peut être considéré comme un prolongement analytique de l'ellipse.

Les autres coniques fournissent des résultats analogues.

Il pourrait être intéressant d'étudier, à ce point de vue, quelques courbes d'ordre supérieur.

11. — Dr Willy SCHERRER (Zurich). — *Un théorème sur les réseaux et sur les volumes.* — Il s'agit d'un théorème de la géométrie des nombres, auquel on peut donner l'énoncé suivant: Dans un réseau de côté unité, un domaine D de volume unité contient au moins deux points que joint un vecteur du réseau.

La démonstration est basée sur le lemme suivant: Etant donnés  $Z > \mu^n$  points répartis d'une façon arbitraire dans un réseau à  $n$  dimensions, où  $\mu$  est un nombre naturel, il y a au moins deux points réunis par un vecteur du réseau de côté  $\mu$ .

Considérons les vecteurs ayant leurs origine en un point quelconque du réseau et se terminant aux  $Z$  points en question. Parmi ces vecteurs il y en a au moins deux ayant les mêmes restes pour le module  $\mu$  et notre lemme se trouve démontré.

Divisons maintenant les côtés du réseau unité primitif par le nombre naturel  $N$  et construisons le réseau correspondant à ces divisions.

Parmi les points de ce réseau il y en a  $Z$  qui tombent dans le domaine D. Le volume de D peut être défini par l'expression:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{Z}{N^n} = 1 .$$



Appliquons maintenant le lemme précédent aux  $Z$  points du nouveau réseau et prenons  $\mu = \left[ \sqrt[n]{Z} \right]$ . Rapportons tout aux unités primitives et faisons le passage à la limite:  $N = \infty$ , nous obtenons notre théorème.

Ce théorème fournit une base simple pour différents théorèmes de la géométrie des nombres. Il en est ainsi du théorème de Minkowski sur les corps convexes centrés, de même de l'inégalité de Tchebychew-Minkowski concernant les formes quadratiques décomposables. Enfin notre théorème donne sous une forme géométrique certains résultats concernant les systèmes d'équations linéaires de Diophante.

12. — Prof. G. JUVET (Neuchâtel). — *Equations aux dérivées fonctionnelles partielles*. — Ces recherches font partie d'un travail qui sera publié plus tard.

### Société suisse des Professeurs de Mathématiques.

La Société suisse des professeurs de mathématiques a tenu sa réunion annuelle à Zoug, le 8 octobre 1922, sous la présidence de M. le Dr H. SCHUEPP, professeur à l'Ecole cantonale de Zurich. En ouvrant la séance, le président a rappelé le décès des Professeurs Cailler (Genève), Gubler (Zurich), Meier (St-Gall), et H. Suter (Zurich), puis il a rendu compte des démarches qui ont été faites auprès des autorités à la suite des propositions et vœux émis par la Société en 1921 au sujet des programmes des examens fédéraux de maturité.

*Les éléments à l'infini dans l'enseignement de la Géométrie*. — M. le Prof. GROSSMANN (Zurich) a d'abord rappelé l'importance et la portée des éléments à l'infini en géométrie, puis M. le Prof. METTLER (Zurich) s'est placé au point de vue de l'enseignement dans les écoles moyennes. A quel moment et dans quelle mesure ces notions peuvent-elles être introduites dans l'enseignement géométrique? Il estime que pour le début, il faut rester au point de vue des anciens: deux droites parallèles ne se rencontrent pas. L'introduction des locutions nouvelles, point, droite et plan de l'infini, ne doit se faire que plus tard à l'aide d'exemples bien choisis, au moment où l'on aborde les notions de géométrie moderne.

*Plans d'études*. — Dans une seconde séance MM. AMBERG (Zurich) et FLATT (Bâle) rapportent sur le projet de maturité et les plans d'études mathématiques dans l'enseignement moyen. M. Amberg se place au point de vue du gymnase, tandis que M. Flatt insiste plus particulièrement sur les besoins des écoles réales et des sections scientifiques. Après discussion, l'assemblée décide de confier à une commission spéciale l'élaboration d'un projet de plans d'études pour les branches mathématiques dans les différentes sections de l'enseigne-