

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 22 (1921-1922)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: Sur le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 20.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet.

I. — *Réponse à une Note de M. Mar. Bedarida*
par M. Léon AUBRY.

Dans sa note (*Enseignement mathématique*, 22^{me} année, 1921 et 1922, n°s 1-2, pp. 51-52), M. BEDARIDA affirme que les considérations sur lesquelles je me suis basé, ne sont pas justes, mais il ne donne aucun argument décisif contre mes objections; voici quelques explications pour bien montrer que je n'ai pas du tout envisagé la valeur $s = 1$.

Dans le *Journal de Liouville* (Tome 4, 1839, p. 396), DIRICHLET a voulu établir, pour $s > 1$, l'égalité

$$\prod_{1 - \omega} \frac{1}{1 - \omega \gamma \frac{1}{q^s}} = \sum \omega \gamma \frac{1}{n^s} = L \quad (1)$$

mais, en réalité, sa démonstration, basée sur la convergence de $\sum \frac{1}{h^s}$, n'est valable que pour les valeurs de s qui rendent cette somme convergente, elle n'est donc pas valable, à bien plus forte raison, pour les valeurs de $s \geq 1$ qui rendent $\log L_0 = \infty$, puisque par construction $L_0 < \sum \frac{1}{h^s}$ et l'on ne peut donc avoir en même temps $\log L_0 = \infty$ et l'égalité (1) démontrée, comme l'a admis DIRICHLET, (*loc. cit.*, p. 408 et 411).

M. BEDARIDA affirme que DIRICHLET a déduit par des raisonnements rigoureux l'équation de la page 411 (*loc. cit.*) où $s = 1 + \rho$, $\rho > 0$, or il faut remarquer que ρ n'est pas un nombre quelconque, mais nécessairement infiniment petit, puisque la démonstration de DIRICHLET est basée en grande partie sur des raisonnements d'analyse infinitésimale rigoureux seulement pour $s = 1 + \rho$ avec ρ infiniment petit et tendant vers 0; il y a donc là encore une contradiction, puisque ces raisonnements d'analyse ne sont absolument exacts que pour la limite $s = 1$, tandis que pour cette valeur de s , l'égalité (1) n'est pas démontrée par DIRICHLET.

II. — *Réponse à la lettre de M. Léon Aubry*
par M. Mar. BEDARIDA.

Dans la note ci-dessus qui nous a été obligamment communiquée par la Rédaction, M. L. Aubry nous dit qu'il n'est pas persuadé de mes observations sur ses objections concernant la démonstration de Dirichlet du théorème de la progression arithmétique.

En supposant $\rho > 0$, Dirichlet arrive à l'égalité (*Journ. de Liouville*, t. 4, 1839, p. 411) :

$$\sum \frac{1}{q^{1+\rho}} + \frac{1}{2} \sum \frac{1}{q^{2+2\rho}} + \frac{1}{3} \sum \frac{1}{q^{3+3\rho}} + \dots$$

$$= \frac{1}{p-1} \left[\log L_{(0)} + \Omega^{-\gamma_m} \log L_{(1)} + \Omega^{-2\gamma_m} \log L_{(2)} + \Omega^{-(p-1)\gamma_m} L_{(p-2)} \right]$$

qui a toujours une valeur déterminée et finie dans l'hypothèse $\rho > 0$.

Dans cette relation, Dirichlet passa à la limite pour $\rho = 0$ ($s = 1$); dans le § II de son Mémoire il a démontré que $\lim_{s \rightarrow 1} \log L_{(0)} = \infty$.

A présent, les considérations pour le passage à la limite pour $s = 1$ ne conduisent pas à devoir considérer l'égalité :

$$\prod \frac{1}{1 - \omega \gamma \frac{1}{q^s}} = \sum \omega \frac{\gamma}{n^s} = L \quad (1)$$

pour $s = 1$. Dans la démonstration de Dirichlet, on ne demande pas d'examiner (1) pour $s = 1$, mais il y a seulement des considérations à la limite pour $s = 1$ ($\rho = 0$).

M. Aubry ne doit pas oublier le principe fondamental de la théorie des limites fonctionnelles, c'est-à-dire que la limite (quand elle existe) est bien différente de la valeur (s'il y en a une) que prend la fonction lorsqu'on remplace la variable par la valeur pour laquelle on considère la limite.

J'ajouterais encore les observations suivantes, au sujet des réponses publiées dans le fasc. 5-6, p. 69-70, 1922, de l'*Intmédiaire des Mathématiciens*, à propos des remarques de M. Aubry sur la démonstration de Dirichlet du théorème de la progression arithmétique.

Les citations bibliographiques de ces réponses ne font pas comprendre si quelque mathématicien a prouvé que les raisonnements de Dirichlet ne seraient pas rigoureux, mais ils donnent seulement des indications d'auteurs qui ont simplifié la démonstration de Dirichlet et qui ont donné au théorème une plus vaste extension; en outre, on signale la nouvelle démonstration de M. Landau.

Quant au théorème indiqué dans la première réponse, je dis qu'il a été étendu, sans recourir à des considérations d'analyse, aux progressions $mx + 1$, où m est un entier quelconque (KRONECKER, *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik*, p. 440-441).

Gênes, décembre 1922.

A.-M. BEDARIDA.