

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 22 (1921-1922)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Kapitel:** Fonctions triplement périodiques d'une seule variable indépendante  
**Autor:** Winants, par Marcel

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

---

### Fonctions triplement périodiques d'une seule variable indépendante

par Marcel WINANTS (Liège).

I. — En analyse élémentaire, on étudie les fonctions d'une *variable réelle*. On fait correspondre aux diverses valeurs de celle-ci les différents points d'une droite ou d'un segment de droite. On connaît des fonctions périodiques de cette variable, c'est-à-dire des fonctions telles que l'on ait :

$$f(x + mT) = f(x) ,$$

quelle que soit la valeur de  $x$  ;  $T$  représente une constante bien déterminée — c'est la période — tandis que  $m$  est un entier complètement arbitraire : négatif, nul ou positif. Les fonctions périodiques les plus simples sont les fonctions circulaires.

Et l'on a démontré l'impossibilité d'une fonction doublement périodique.

II. — Aux différents points d'une surface plane on peut faire correspondre les diverses valeurs d'une *variable complexe*. L'expression  $z = x + iy$  est appelée *une* variable (une, au singulier). L'analyse des variables complexes a pris un développement tel que l'on en peut considérer l'analyse réelle comme un cas très particulier.

On connaît des fonctions doublement périodiques d'une seule variable complexe ; ce sont des fonctions satisfaisant l'égalité

$$f(z + mT + m'T') = f(z) ,$$

quelle que soit la valeur de  $z$  ;  $T$  et  $T'$  sont les deux périodes, et l'on a démontré que leur rapport était nécessairement complexe ;  $m$  et  $m'$  sont des entiers arbitraires.

Les fonctions elliptiques sont les plus simples parmi les fonctions doublement périodiques d'une seule variable indépendante.

Un très original théorème de Jacobi démontre l'impossibilité d'une fonction uniforme triplement périodique d'une seule variable complexe.

III. — Nous allons développer des considérations analogues pour l'espace à trois dimensions, et nous montrerons enfin comment la science cristallographique semble justifier tous ces développements.

Soient trois axes coordonnés rectangulaires. Envisageons trois vecteurs non coplanaires  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , issus de l'origine.

Considérons le parallélépipède dont les huit sommets correspondent aux vecteurs :

$$\left. \begin{array}{l} 0, a + b + c, \\ a, b, c, \\ b + c, c + a, a + b. \end{array} \right\} (P).$$

A l'intérieur de son volume, prenons un point quelconque, et soit  $u$  le vecteur joignant ce point à l'origine. Choisissons  $u$  comme variable indépendante.

Par un procédé quelconque, à toute valeur de  $u$  faisons correspondre un vecteur  $v$  ; nous aurons :

$$v = f(u) ;$$

posons ensuite :

$$f(u + ma + m'b + m''c) = f(u) .$$

Et nous aurons ainsi défini une *fonction triplement périodique* d'une seule variable indépendante.

Des fonctions de cette nature ont peut-être déjà été envisagées, notamment en analyse vectorielle ? Nous nous bornerons pour le moment à soulever la question et nous serions heureux si quelque lecteur de l'*Ens. math.* pouvait nous renseigner sur ce point.

IV. — Les cristallographes donnent au volume P le nom de paralléloèdre. Ce paralléloèdre est rempli de matière et d'éther. On conçoit un cristal comme formé d'un nombre prodigieusement grand de paralléloèdres identiques, juxtaposés.

Toute propriété, physique ou chimique, en un point d'un cristal, est donc une fonction triplement périodique de la position de ce point. Cette fonction est actuellement réelle, mais ce n'est là qu'un cas particulier.

La triple périodicité d'une structure cristalline est un fait qu'aucun cristallographe ne conteste plus. Elle pourrait, et même devrait suggérer au mathématicien l'étude systématique des fonctions à trois périodes. Cette étude nous paraît fort difficile, d'autant plus que nous ne connaissons encore aucune analyse à trois dimensions, pouvant être considérée comme une généralisation de l'analyse complexe. On ne soutiendra certainement pas que la théorie des quantités complexes rentre dans celle des quaternions comme un cas particulier dans un cas général.

Néanmoins, nous croyons qu'aujourd'hui l'on peut ne plus mettre en doute l'existence des fonctions triplement périodiques d'une seule variable indépendante.

LIÈGE (Université), le 31 mars 1923.