Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 22 (1921-1922)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE MORLEY
Autor: Niewenglowski, B.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515746

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE MORLEY

PAR

B. Niewenglowski (Paris).

Je rappellerai, en premier lieu, les propositions suivantes:

1° Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

En appelant A, B, C les angles de ce triangle, on a

$$\widehat{BIC} = A + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ + \frac{A}{2} .$$

2° Réciproquement, si le point I est, à l'intérieur du triangle ABC et sur la bissectrice de l'angle A et si, en outre,

$$\widehat{BIC} = 90^\circ + \frac{A}{2}$$

le point I est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

Pareillement:

$$\widehat{AIC} = 90^\circ + \frac{B}{2} ,$$

$$\widehat{AIB} = 90^\circ + \frac{C}{2}$$

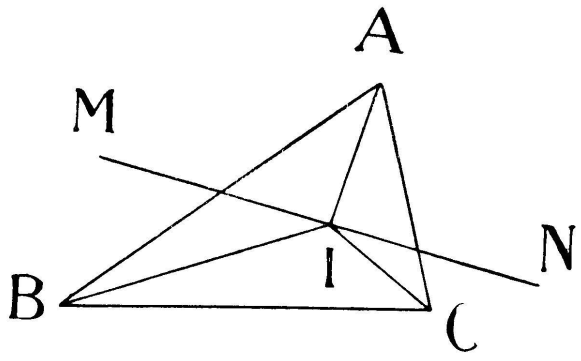

Fig. 1.

donc la perpendiculaire MN menée à AI par le centre I, fait avec IC et IB les angles

$$\widehat{CIN} = \frac{B}{2} , \qquad \widehat{BIM} = \frac{C}{2}$$

3° Supposons toujours que A I soit la bissectrice de l'angle A et posons $\widehat{ABI} = \beta$, $\widehat{IBC} = \beta'$; $\widehat{ACI} = \gamma$, $\widehat{ICB} = \gamma'$. Je dis que si l'on a:

$$\widehat{CIN} = \beta \qquad \text{et} \qquad \widehat{BIM} = \gamma$$

I est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

En effet, les sommes $\beta + \gamma$ et $\beta' + \gamma'$ ayant, l'une et l'autre $\widehat{BIC}$ pour supplément, sont égales. On peut donc écrire

$$\beta + \gamma = \beta' + \gamma' = \frac{B + C}{2}$$

d'où il résulte que

$$\widehat{BIC} = A + \beta + \gamma = A + \frac{B + C}{2} = 90^\circ + \frac{A}{2}$$

ce qui démontre la proposition.

Cela posé, soient D, E, F les milieux des côtés d'un triangle équilatéral HKL. Soient α, β, γ trois angles dont la somme $\alpha + \beta + \gamma = 60°$. A l'intérieur du triangle HEF, construisons le triangle isoscèle EFD′ de façon que les angles $\widehat{HED'} = \widehat{HFD'} = \alpha$; pareillement, traçons les triangles isoscèles DFE′ et DEF′ tels que $\widehat{KFE'} = \widehat{KDE'} = \beta$; $\widehat{LDF'} = \widehat{LEF'} = \gamma$.

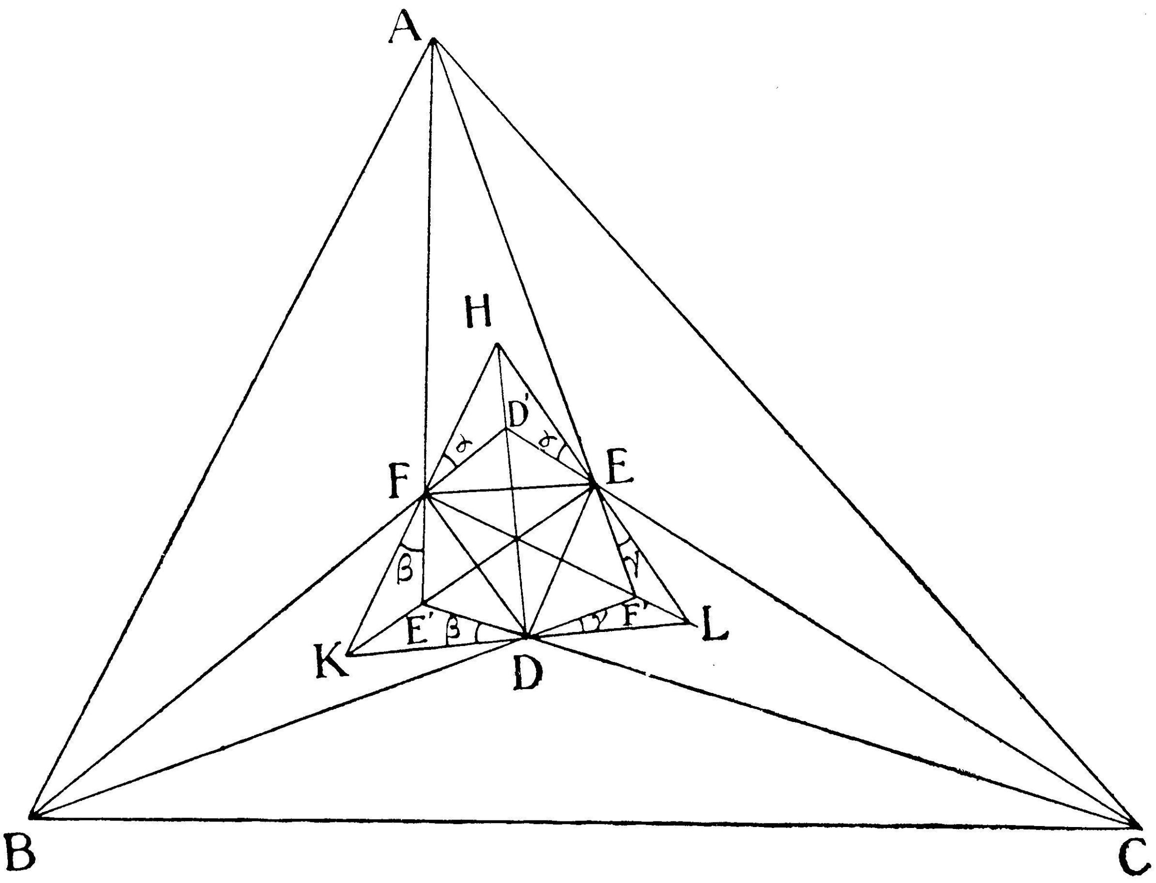

Fig. 2.

Appelons A le point de rencontre des droites $E'F$, $F'E$. Dans le triangle AEF, les angles adjacents au côté EF valant $60° + \beta$ et $60° + \gamma$, le troisième angle vaut α. Pareillement, si B est le point de rencontre des droites $D'F$, $F'D$ et C celui des droites $D'E$, $E'D$, on voit que $\widehat{DBF} = \beta$, $\widehat{DCF} = \gamma$.

Remarquons maintenant que la droite DH passe par D′ et n'est autre que la bissectrice de l'angle $BD'C$, puisqu'elle est perpendiculaire au milieu de EF.

D'autre part $\widehat{LDC} = \beta$, $\widehat{KDB} = \gamma$; donc, d'après le lemme rapporté plus haut (3°), D est le centre du cercle inscrit au triangle BCD′. On verra de même que E est le centre du cercle inscrit au triangle ACE′ et F le centre du cercle inscrit au triangle ABF′. On en conclut que les angles A, B, C du triangle ABC valent 3α, 3β, 3γ respectivement. Les droites AE, AF partagent l'angle A en trois parties égales, de même BD, BF pour l'angle B et CD, CE pour l'angle C. On a ainsi démontré le théorème de Morley:

On partage chaque angle d'un triangle ABC en trois parties égales par les droites AE, AF; BD, BF; CD, CE *qu'on peut appeler trisectrices. Les trisectrices* BD, CD voisines du côté BC se rencontre en D; les trisectrices CE, AE voisines du côté CA se coupent en E et enfin les trisectrices voisines du côté AB se coupent en F.

Le triangle D E F est équilatéral.