l'étude de ce problème, de rapprocher les points de vue de Riemann et de Weierstrass. La même remarque s'applique du reste à bien des problèmes de la théorie des fonctions. Les théories de Cauchy, de Riemann et de Weierstrass se rejoignent les unes les autres, se pénètrent et se complètent et il nous semble, en effet, qu'on a tort, comme le fait remarquer avec raison M. Bieberbach dans la préface à son ouvrage, de les traiter dans des chapitres séparés.

C'est à des théories plus récentes, dont une grande partie se rattachent aux belles recherches de Poincaré, de M. Picard et de M. Hadamard, que sera consacré le second volume du traité de M. Bieberbach. La plupart de ces travaux ont déjà été exposés dans les monographies sur la théorie des fonctions publiées sous la direction de M. Borel et dans le petit volume de M. Landau « Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie ». Il reste à coordonner et à classifier ces résultats, à y mettre de l'ordre et de l'unité, ce qui n'est pas chose facile, car le champ est très vaste, mais la tâche que M. Bieberbach s'est imposée sera grandement facilitée par ses travaux antérieurs.

L'excellent ouvrage de M. Bieberbach est avant tout destiné aux étudiants, mais il pourra servir de guide à tous ceux qui désirent se mettre au courant de la théorie moderne des fonctions analytiques.

D. MIRIMANOFF (Genève).

E. GOURSAT. — **Leçons sur le Problème de Pfaff.** — 1 vol. gr. in-8° de VIII-388 pages; 30 francs; J. Hermann, Paris, 1922.

La publication de ces Leçons tombe admirablement à une époque où se développe un Calcul tensoriel qui, à beaucoup d'égards, prend modèle sur l'analyse des formes de Pfaff. Quant au problème pfaffien lui-même, il est toujours posé comme son créateur l'a posé. Il s'agit d'abord de l'étude de la forme

$$\omega = X_1\, dx_1 + X_2\, dx_2 + \ldots + X_n\, dx_n \;.$$

L'équation $\omega = 0$ définit une variété à $n-1$ dimensions si de certaines conditions d'intégrabilité sont satisfaites. Sans conditions, on peut toujours la réaliser sur une variété à une dimension c'est-à-dire sur une courbe. Or, entre les deux cas, il doit y avoir manifestement des cas intermédiaires avec variétés intégrales à $n - r$ dimensions. Ceci conduit à rechercher d'abord, pour ω, des *formes canoniques* que Pfaff envisageait déjà au travers d'intégrations successives et compliquées mais que des travaux modernes (notamment ceux de Gaston Darboux, de MM. Goursat et Cartan) rendent d'une considération beaucoup plus aisée.

Si l'on cherche à attacher à ω des variétés à deux dimensions, on est immédiatement conduit au *covariant bilinéaire* ω' de ω dont les coefficients

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i}$$

satisfont aux identités

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_l} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{li}}{\partial x_k} = 0 \;.$$

Nous sommes à un petit pas des équations de l'Electromagnétisme; d'ailleurs le calcul des variations et la Géométrie donnent plusieurs interprétations de ω'. Les a_{ik} permettent de construire quatre systèmes S_1, S_2, S_3, S_4 d'équations pfaffiennes; c'est surtout le fait, pour ces systèmes, de se composer d'équations non distinctes qui entraîne des réductions de structure pour ω. Telle est la substance essentielle du Chapitre I.

Le Chapitre II se rapporte à l'intégration d'une équation $\omega = 0$. Qui est seulement habitué aux méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre reconnaît sans peine qu'il y a là une extension de ces méthodes. Le langage est le même: systèmes caractéristiques, intégrales lieux de caractéristiques, etc..... D'ailleurs l'équation

$$p_1 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, z : p_2, \ldots, p_n)$$

revient évidemment à

$$\omega = f dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n - dz = 0 .$$

Avec le Chapitre III nous arrivons aux formes symboliques de différentielles. Cette expression, consacrée par l'usage, pourrait cependant prêter à l'erreur pour qui n'aurait pas encore abordé ces captivantes théories. Les nouvelles formes dont il s'agit sont naturellement à leur place sous les intégrales multiples, alors que, dans le même ordre d'idées, la forme ω ci-dessus pourrait être placée sous une intégrale simple. Elles ne sont pas moins tangibles que ω, mais elles obéissent à des règles de calcul à symbolisme vectoriel. Les produits $dx_1\, dx_2 \ldots$ n'admettent point la duplication des facteurs et changent de signe quand on intervertit deux facteurs consécutifs. C'est ce que M. Goursat a excellemment expliqué sur d'ordinaires intégrales doubles.

On pressent maintenant comment vont s'orienter les recherches. On étudiera les réductions canoniques des différentielles d'ordre supérieur qui viennent d'être introduites.

L'extrême intérêt de la chose, le principal même est que la théorie établie pour la forme linéaire ω s'étend aisément, élégamment, à tous les ordres. Les formules les plus pratiques qui apparaissent alors sont vraisemblablement celles qu'on peut dire du type *stokien*. Une intégrale multiple porte sur une certaine forme et est égale à une intégrale d'ordre supérieur d'une unité, à champ d'intégration déformable, cette dernière intégrale portant sur la *dérivée* de la forme primitive. C'est sans doute ici qu'apparaît, de la manière la plus visible, ce contact avec le Calcul tensoriel que M. Goursat signale lui-même. Nous ne sommes plus maintenant tout près des équations de l'Electromagnétisme; nous y sommes ! Ce sont les équations (54) de la page 151 [1].

Le Chapitre IV traite de l'application des formes symboliques au problème de Pfaff; il s'agit, bien entendu, du problème de Pfaff tel qu'il a été posé au début pour la forme linéaire ω. Le symbolisme du chapitre précédent n'a étudié des formes différentielles, à de certains points de vue plus com-

[1] Th. De Donder. *Champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz et champ gravifique d'Einstein*, 1920. *Gravifique einsteinienne*, 1921. Paris, Gauthier-Villars.

A. Buhl. *Electromagnétisme et Gravifique* (Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse, 1920).

plexes, que pour qu'on puisse maintenant les adjoindre à ω et définir notamment des *formes dérivées*, d'ordres divers pour ω. En prenant successivement ces dérivées on finit toujours par en rencontrer une qui est identiquement nulle et c'est sans doute là la manière la plus claire de concevoir la *classe* ou la forme canonique de ω.

On montre alors, très élégamment, que la dernière dérivée non nulle permet d'écrire immédiatement un système d'équations linéaires aux dérivées partielles, dit *système adjoint* Σ_1, dont les intégrales sont précisément les variables canoniques de la forme réduite. Un système Σ_2 construit de même à partir de l'avant dernière dérivée est identique au système S_3 du chapitre I. De là, on peut redescendre vers l'intégration de systèmes arbitrairement donnés d'équations aux dérivées partielles du premier ordre et, dans le même ordre d'idées, vers la construction des transformations de contact.

Le Chapitre V expose la théorie des invariants intégraux, en partant des définitions de Poincaré. Il importe maintenant d'être bref; nous dirons donc simplement que M. Goursat a traité de ces invariants dans leurs rapports très intimes avec les différentielles symboliques, les intégrales premières et la permutation des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires.

Le Chapitre VI nous conduit aux systèmes formés de plusieurs équations de Pfaff. Ici la difficulté croît considérablement; elle est analogue ou, pour mieux dire, elle généralise la difficulté de passer d'équations aux dérivées partielles du premier ordre aux équations d'ordre supérieur. Inversement les équations d'ordre supérieur peuvent être traduites par des systèmes pfaffiens.

Dans le chapitre VII, consacré aux systèmes dérivés et au problème de Monge, l'intervention de dérivées partielles du second ordre se précise en des questions telles que celle des transformations de contact *prolongées*. Il s'agit d'équations de transformation qui contiennent non seulement des x, y, z, p, q, cas où elles seraient des transformations de contact ordinaires, mais aussi des r, s, t. Ce prolongement dépend de conditions d'intégrabilité de certains systèmes pfaffiens. Il y a là des choses impossibles à décrire brièvement mais dont l'intérêt est d'autant moins niable qu'elles semblent appeler de nouvelles et profondes recherches.

Le problème de Monge généralise l'équation $\omega = 0$ en remplaçant ω par une forme différentielle homogène mais non linéaire par rapport aux dx. Il dépend, lui aussi, d'un système pfaffien spécial.

Enfin le chapitre VIII termine l'ouvrage par les multiplicités intégrales et le genre d'un système de Pfaff. Ici sont condensés les théorèmes d'existence analogues à ceux qui concernent les équations aux dérivées partielles. On y trouve des nombres entiers qui caractérisent les systèmes différents, ou mieux encore le degré d'arbitraire des solutions possibles. Ces recherches, de plus en plus élevées, mènent aux travaux de M. Ch. Riquier. Elles sont, en très grande partie, l'œuvre de M. E. Cartan; elles touchent à l'analysis situs, aux difficultueuses questions de déformation dans les hyperespaces non-euclidiens. Et comme les noms de MM. Riquier et Cartan ne vont évidemment point sans être précédés de celui de M. E. Goursat lui-même, il n'est pas inutile de souligner, comme je l'ai fait en maints autres endroits, que la France ne manque point de savants créateurs pour lesquels la très belle analyse des théories einsteiniennes n'a jamais eu de secrets.

A. Buhl (Toulouse).