

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	22 (1921-1922)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA CRISTALLOGRAPHIE
<b>Autor:</b>	Winants, Marcel
<b>Kapitel:</b>	§ 4. — Sections planes.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-515727">https://doi.org/10.5169/seals-515727</a>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

De cette dernière équation, il résulte:

1<sup>o</sup> que la surface admet la symétrie cristallographique du tétraèdre régulier;

2<sup>o</sup> qu'elle ne pénètre pas à l'intérieur du tétraèdre ombilical.

#### § 4. — Sections planes.

25. — Tout plan, parallèle à l'un des plans coordonnés, coupe la surface suivant une hyperbole équilatère. En effet, les deux équations:

$$xyz = p^3, \quad z = c,$$

entraînent:

$$xy = \frac{p^3}{c}.$$

26. — Tout plan passant par l'un des axes coordonnés, coupe

la surface suivant une cubique cuspidale (1). Car les deux équations:

$$xyz = p^3, \quad y = tx,$$

entraînent:

$$tx^2z = p^3,$$

ou

$$x^2z = a^3.$$

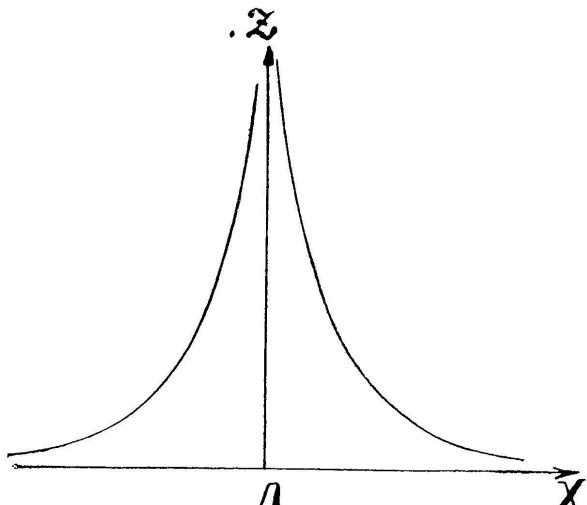


Fig. 5.

C'est une cubique [5<sup>o</sup>, c] dont le rebroussement se trouve à l'infini. Cette cubique est formée de deux branches, symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des z. La constante  $a^3$  a le même signe que t. La courbe rencontre les bissectrices des angles que font les axes coordonnés, aux points:

$$\pm x = z = a.$$

En ces points, les tangentes ont, pour coefficients angulaires:

$$\left[ -\frac{2xz}{x^2} \right]_x = \mp 2.$$

Ceci démontre que les branches, prises séparément, ne sont pas symétriques par rapport aux bissectrices.

27. — Pour étudier les sections faites par des plans perpendiculaires à un  $\Lambda^3$ , nous allons, tout d'abord, établir des formules de transformation des coordonnées, dont nous aurons souvent à faire usage.

Tout plan perpendiculaire à la droite  $x = y = z$ , coupe le trièdre coordonné trirectangle suivant un triangle équilatéral ABC, que nous prendrons comme triangle de référence.

Soient M un point quelconque du plan sécant ;  $x, y, z$  ses coordonnées rectilignes dans l'espace ;  $\alpha, \beta, \gamma$  ses coordonnées trilinéaires absolues dans le plan sécant.

La figure montre qu'on a :

$$z = \gamma \sin \theta ;$$

mais :

$$\sin^2 \theta = 1 ;$$

donc

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{2}{3}} ;$$

et, par conséquent :

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \sqrt{\frac{2}{3}} .$$

D'autre part :

$$\alpha + \beta + \gamma = (x + y + z) \sqrt{\frac{3}{2}} = \text{constante}$$

est l'équation du plan.

28. — Coupons donc la surface  $xyz = p^3$  par le plan  $x + y + z = l$  ; en coordonnées trilinéaires absolues, la section sera représentée par l'équation :

$$\alpha \beta \gamma = \left( p \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^3 = m^3 .$$

C'est donc la courbe que nous avons étudiée plus haut (2-12). Le triangle fondamental a pour hauteur :

$$\alpha + \beta + \gamma = l \sqrt{\frac{3}{2}} .$$

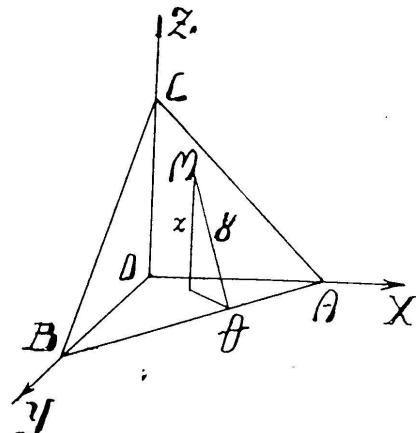


Fig. 6.

En faisant varier  $l$  de  $-\infty$  à  $+\infty$ , on obtient toutes les cubiques indiquées dans le tableau de la fin du n° 10.

29. — Toutes les sections planes ont des symétries particulières, mais qui sont compatibles avec la symétrie tétraédrique de la surface. Il suffit qu'on tienne compte de la position particulière du plan sécant (25, 26, 28).

### § 5. — Propriétés du plan tangent.

30. — Nous allons établir quelques propriétés de la surface, dont on ne verra pas immédiatement les relations avec la symétrie.

Nous représenterons les coordonnées courantes d'un point de l'espace par  $X, Y, Z$ , et celles du point de contact par  $x, y, z$ . L'équation du plan tangent est :

$$(X - x)yz + (Y - y)zx + (Z - z)xy = 0,$$

ou

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 3.$$

Donc, les coordonnées à l'origine du plan tangent sont triples des coordonnées du point de contact. Soit ABC le triangle suivant lequel le plan tangent coupe le trièdre coordonné. Le point de contact est le centre de gravité du triangle ABC.

Tout plan tangent détermine, avec les plans coordonnés, un tétraèdre de volume constant :

$$V = \frac{9}{2}p^3.$$

Tout ceci rappelle des propriétés de l'hyperbole algébrique plane du second ordre.

31. — Calculons la distance d'un plan tangent à l'origine. Cette distance est donnée par une formule bien connue de Géométrie analytique.

$$d = \frac{-3}{\pm \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}}} = \frac{3xyz}{\sqrt{y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2}}$$

ou

$$d = \frac{3p^3}{\sqrt{y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2}}. \quad (1)$$